

Dieta

Un team di dietologi ha studiato le quantità ottimali di sostanze nutritive che dovrebbero costituire l'alimentazione ottimale per un atleta. L'atleta deve procurarsi le sostanze nutritive da un opportuno mix di alimenti disponibili e vuole riuscirci minimizzando i costi.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file `DIETA.TXT`.

Discutere ottimalità e unicità della soluzione trovata.

Quanto costa ogni giorno la dieta ottimale?

Se aumentasse il costo della pasta o del pane, quali sarebbero le conseguenze sulla dieta ottimale?

E se diminuisse il costo del latte o del pesce?

Esempio.

I risultati degli studi dietologici sono riassunti dalle tabelle seguenti.

Alimenti (quantità)	Sostanze nutritive (grammi)		
	Proteine	Carboidrati	Grassi
Pasta (100 g)	11.50	72.70	1.50
Latte (100 ml)	3.15	4.85	1.55
Formaggio fresco (100 g)	8.00	3.80	11.00
Formaggio stagionato (100 g)	33.00	0.00	28.40
Pesce (100 g)	18.50	0.50	19.00
Patate (100 g)	2.10	0.00	0.10
Spinaci (100 g)	2.40	0.60	0.50
Pane (100 g)	12.00	68.00	6.00
Polenta (100 g)	9.00	74.00	1.00

Tabella 1: Quantità di sostanza nutritive (grammi di sostanza per ogni etto di alimento).

Alimenti (quantità)	Calcio	Fosforo
Pasta (100 g)	.	.
Latte (100 ml)	15.00 %	.
Formaggio fresco (100 g)	52.50 %	28.00 %
Formaggio stagionato (100 g)	139.00 %	85.00 %
Pesce (100 g)	.	20.00 %
Patate (100 g)	1.25 %	6.05 %
Spinaci (100 g)	.	.
Pane (100 g)	.	.
Polenta (100 g)	.	.

Tabella 2: Percentuale di fabbisogno giornaliero di Calcio e Fosforo contenuta in 100 g di alimento.

Sostanza	Limite inferiore	Limite superiore
Proteine	25 %	35 %
Carboidrati	15 %	25 %
Grassi	10 %	20 %

Tabella 3: Limiti superiori ed inferiori di sostanze nutritive (percentuale sul totale di sostanze nutritive assunte).

Alimenti (quantità)	Prezzo
Pasta (1 kg)	2.00
Latte (1 l)	2.20
Formaggio fresco (1 kg)	16.00
Formaggio stagionato (1 kg)	29.00
Pesce (1 kg)	22.50
Patate (1 kg)	3.50
Spinaci (1 kg)	5.00
Pane (1 kg)	7.00
Polenta (1 kg)	10.00

Tabella 4: Prezzi degli alimenti, espressi in euro.

Soluzione.

Dati. Indichiamo con A l'insieme degli alimenti (nove nell'esempio), con S l'insieme delle sostanze nutritive (proteine, Carboidrati e grassi nell'esempio) e con E l'insieme degli elementi (Calcio e Fosforo, nell'esempio). Indichiamo con q_{sa} la quantità in grammi di ogni sostanza $s \in S$ in ogni 100 grammi di alimento $a \in A$. Indichiamo con p_s^{min} e p_s^{max} le percentuali minima e massima di sostanza richiesta sul totale delle sostanze assunte. Indichiamo con π_{ae} la percentuale di fabbisogno giornaliero di elemento $e \in E$ contenuto in 100 grammi di alimento $a \in A$. Indichiamo con c_a il costo di ogni alimento $a \in A$, espresso in euro per chilogrammo o litro.

Variabili. Le variabili del problema sono le quantità $x_a \geq 0$ di ogni alimento $a \in A$ che costituiscono la dieta giornaliera dell'atleta, espresse in chilogrammi. Per comodità è utile anche inserire variabili $y_s \geq 0$, che indicano la quantità totale di sostanze assunte giornalmente, espresse in grammi. Tutte le variabili sono continue e non-negative.

Obiettivo. La funzione obiettivo da minimizzare è il costo giornaliero della dieta, espresso in euro, dato da una combinazione lineare delle variabili x pesate con i costi degli alimenti corrispondenti.

$$\text{minimize } z = \sum_{a \in A} c_a x_a.$$

Vincoli. Per legare le variabili ausiliarie y alle variabili x , si introducono vincoli di uguaglianza, espressi in grammi di sostanza:

$$y_s = \sum_{a \in A} q_{as}(10x_a) \quad \forall s \in S,$$

dove il fattore 10 serve a convertire i chilogrammi in ettogrammi.

I vincoli sulla dieta sono di due tipi. I vincoli sulle sostanze (proteine, carboidrati e grassi) limitano le quantità totali di queste sostanze rispetto al totale delle sostanze assunte.

$$\frac{p_s^{min}}{100} \sum_{r \in S} y_r \leq y_s \leq \frac{p_s^{max}}{100} \sum_{r \in S} y_r \quad \forall s \in S.$$

I vincoli sugli elementi (Calcio e Fosforo), invece, richiedono che la loro quantità totale sia esattamente pari al fabbisogno giornaliero. Questo requisito dà quindi luogo a vincoli di uguaglianza.

$$\sum_{a \in A} \pi_{ae}(10x_a) = 100 \quad \forall e \in E.$$

Il modello risultante è di Programmazione lineare (file DIETA.MOD). Quindi la soluzione fornita dai solutori è garantita essere ottima.

La soluzione ottima dell'esempio (file `DIETA.OUT`) ha un costo giornaliero di circa 4,5 Euro e prevede una dieta composta esclusivamente da pasta, formaggio stagionato e patate. Nessuna variabile fuori-base ha costo ridotto nullo; quindi la soluzione ottima di questo esempio è unica.

Analisi post-ottimale. Dall'analisi post-ottimale si ricava che in caso di aumento del prezzo della pasta la soluzione ottima non cambierebbe fino ad un aumento di circa 5 Euro al chilogrammo (da 2 a 7,09569 Euro al chilogrammo). Al di là di tale soglia, la pasta cesserebbe di essere conveniente (la corrispondente variabile uscirebbe di base).

Se invece aumentasse il prezzo del pane, la soluzione non cambierebbe, dal momento che il pane non fa parte del mix ottimale di alimenti.

Il latte non entrerebbe a far parte del mix ottimale nemmeno se il suo prezzo diventasse negativo.

Il pesce entrerebbe nel mix ottimale se il suo prezzo diminuisse di almeno tanto quanto il costo ridotto della corrispondente variabile x , cioè di 10,04988 euro al kg (da 22,5 a 12,45012 euro al chilogrammo).