**Comizi elettorali**

E' l'ultimo giorno della campagna elettorale e gli onorevoli Berlustelli e Rutusconi si stanno sfidando all'ultimo comizio. Ciascuno di loro deve percorrere l'autostrada e fermarsi in alcune città per arringare le folle. Ogni loro sosta lungo il viaggio implica un certo tempo fisso, uguale per entrambi ed indipendente dalla città, che deve essere impiegato stringendo mani e baciando bambini.

Ogni comizio può essere di due tipi: comizio sintetico, in cui vengono enunciati rapidi slogan, e comizio analitico, in cui vengono esaminati in dettaglio vari punti del programma di governo. Ogni tipo di comizio ha la sua durata standard, indipendente dal numero di persone che vi assistono e uguale per entrambi gli onorevoli.

In ogni città corrispondente ad un'uscita dell'autostrada è previsto che possa partecipare al comizio un certo numero di persone a seconda del tipo di comizio che vi si tiene e uguale per entrambi i candidati.

Poiché la campagna elettorale volge al termine i comizi devono essere programmati in modo che l'ultimo termini entro la mezzanotte.

Lo scopo del viaggio è ovviamente quello di arringare il maggior numero possibile di elettori.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati riportati nel seguito.

Se i due onorevoli percorrono l'autostrada uno da A verso Y e l'altro da Y verso A, chi è avvantaggiato?

E se piovesse e la velocità dovesse essere ridotta a 60 Km/h?

A che velocità dovrebbero viaggiare i due candidati per poter arringare più elettori?

Quanto costa a ciascuno in termini di numero di elettori arringati la necessità di stringere mani e baciare bambini ad ogni tappa?

**Esempio.**

La tabella fornisce per ogni città in cui i candidati possono fermarsi la distanza dall'estremità A dell'autostrada A-Y, e l'audience prevista a seconda del tipo di comizio.

| Città | Distanza (km) | Audience1 | Audience2 |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 120 | 140 |
| B | 12 | 80 | 200 |
| C | 25 | 60 | 100 |
| D | 31 | 400 | 450 |
| E | 46 | 200 | 250 |
| F | 60 | 10 | 30 |
| G | 72 | 500 | 550 |
| H | 89 | 90 | 110 |
| I | 110 | 50 | 80 |
| J | 127 | 300 | 330 |
| K | 142 | 10 | 50 |
| L | 160 | 60 | 90 |
| M | 166 | 230 | 280 |
| N | 170 | 190 | 240 |
| O | 180 | 100 | 150 |
| P | 193 | 100 | 110 |
| Q | 211 | 100 | 180 |
| R | 218 | 200 | 300 |
| S | 230 | 80 | 180 |
| T | 244 | 10 | 20 |
| U | 263 | 80 | 150 |
| V | 280 | 90 | 100 |
| W | 285 | 120 | 130 |
| X | 292 | 500 | 650 |
| Y | 298 | 400 | 490 |

Gli spostamenti tra una città e l'altra avvengono ad una velocità media di 100 Km/h.

Il tempo fisso per ogni sosta è pari a 1/2 ora.

La durata del comizio è di 1 ora (tipo 1) o 1.5 ore (tipo 2).

Il tempo a disposizione è di 16 ore.

**Soluzione.**
Il problema ha tante variabili quante le città $i = 1..25$ e i tipi di comizio $j = 1, 2$ che si possono svolgere in ciascuna, cioè 25 x 2 = 100 variabili binarie $x(i, j)$.

La funzione obiettivo richiede di massimizzare il numero di elettori arringati, cioè la somma delle variabili, ciascuna pesata con l'audience $a(i, j)$ corrispondente.
In ogni città si può svolgere solo un tipo di comizio, quindi esistono vincoli:

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1...25$$

Inoltre esiste un tempo massimo che si può consumare. Il tempo impiegato è dato dalla somma di tre termini, che si possono convenientemente esprimere, per comodità, introducendo tre variabili ausiliarie: $T^v$ (tempo di viaggio), $T^f$ (tempo fisso), $T^c$ (durata dei comizi), la cui somma deve risultare inferiore alla soglia massima $T^{max}$. Il valore di $T^c$ è dato dalla somma pesata delle variabili $x(i, j)$ ciascuna moltiplicata per la durata $d(j)$ del corrispondente tipo di comizio.

$$T^c = \sum_{i=1}^{25} \sum_{j=1}^{2} d_j x_{ij}.$$

Il valore di $T^f$ è pari al numero di città visitate moltiplicato per il tempo fisso $F$, cioè:

$$T^f = \sum_{i=1}^{25} \sum_{j=1}^{2} F x_{ij}.$$

Infine il valore di $T^v$ è tale che moltiplicato per la velocità $v$, deve essere sufficiente a raggiungere l'ultima città visitata. Il prodotto $vT^v$ deve quindi essere maggiore o uguale alla distanza $s(i)$ tra il punto di partenza e ciascuna delle città visitate.

$$vT^v \geq s_i \sum_{j=1}^{2} x_{ij} \quad \forall i = 1, ..., 25.$$

Si tratta quindi di un problema di programmazione lineare binaria.

Supponendo di percorrere l'autostrada da A verso Y, la soluzione ottima vale $2980$. Sostituendo la distanza da A, $s(i)$, con la distanza da Y, $s(Y) - s(i)$ e risolvendo nuovamente ha lo stesso valore ottimo.

Usando le stesse due formulazioni si può modificare il valore di $v$ (60 $km/h$ invece che $100$ $km/h$) e rifare il confronto: viaggiando da A a Y il valore ottimo è $2690$, mentre da Y verso A è $2780$. Perciò la pioggia avvantaggerebbe il candidato che si sposta da Y verso A.

Per sapere a che velocità bisognerebbe viaggiare per poter arringare un maggior numero di elettori, occorre lasciare variabile la velocità $v$ e porre come vincolo che il numero di elettori arringati (che nella formulazione precedente è la funzione obiettivo) sia maggiore o uguale al valore ottimo più uno, cioè $2981$. Si ottiene in questo caso un problema non-lineare a variabili intere: la velocità minima dovrebbe essere di $119.2$ $km/h$, viaggiando da A verso Y e di $106.8$ $km/h$ viaggiando da Y verso A.

Infine potendo fare a meno di stringere mani e baciare bambini, il tempo fisso ad ogni comizio si azzererebbe, producendo un valore ottimo migliore, pari per entrambi i candidati a $3580$ anziché $2980$, cioè circa il $20\%$ in più.