

Caramelle

Un'industria dolciaria deve ottimizzare la propria produzione di caramelle. Essa produce vari tipi diversi di caramelle. Per ciascun tipo occorrono ingredienti in proporzioni diverse. Le caramelle prodotte, tutte molto richieste sul mercato, hanno un differente valore commerciale. Sono note le massime quantità di ingredienti acquistabili per ogni giorno.

Formulare e risolvere con i dati del file `CARMELLE.TXT`.

Discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Rispondere quindi alle seguenti domande.

1. Tutti i tipi di caramella sono convenienti da produrre?
2. Nel caso in cui qualche tipo non fosse conveniente, quale dovrebbe essere il suo prezzo di vendita minimo per renderne conveniente la produzione?
3. Viceversa, si vuole sapere per tutti i tipi di caramella convenienti per quale oscillazione percentuale del prezzo di vendita, la caramella resta conveniente.
4. Le caramelle sono destinate al mercato estero e le oscillazioni del cambio fanno variare tutti i prezzi simultaneamente della stessa percentuale: tra le caramelle convenienti qual è la meno robusta rispetto alle oscillazioni del cambio?
5. Potendo acquistare ulteriori coloranti e conservanti a prezzo pari a metà di quello corrente, è conveniente aumentare tali risorse? Quanto è conveniente comprarne in più e in che quantità?

Esempio.

Le caramelle sono sette: Dolce Delizia Bacetto Golosa Sfizio Slurp Sweety.

Gli ingredienti sono nove: Fruttosio, Saccarosio, Glucosio, Destrosio, Estratti di erbe, Estratti di frutta, Coloranti, Conservanti, Aromatizzanti.

	Dolce	Delizia	Bacetto	Golosa	Sfizio	Slurp	Sweety
Fruttosio	30	0	5	5	5	10	10
Saccarosio	20	30	0	5	5	5	10
Glucosio	15	20	30	0	5	5	5
Destrosio	10	15	20	30	0	5	5
Estratti di erbe	10	10	15	20	30	0	5
Estratti di frutta	5	10	10	15	20	30	0
Coloranti	5	5	10	10	15	20	30
Conservanti	5	5	5	10	10	15	20
Aromatizzanti	0	5	5	5	10	10	15

Tabella 1: Composizione dei prodotti (percentuale).

Ingrediente	Quantità
Fruttosio	9.0
Saccarosio	5.0
Glucosio	20.0
Destrosio	18.0
Estratti di erbe	20.0
Estratti di frutta	17.0
Coloranti	18.4
Conservanti	12.5
Aromatizzanti	10.0

Tabella 2: Disponibilità degli ingredienti [kg/giorno].

Ingrediente	Prezzo
Fruttosio	4.00
Saccarosio	2.00
Glucosio	1.00
Destrosio	3.50
Estratti di erbe	8.00
Estratti di frutta	10.00
Coloranti	2.00
Conservanti	5.00
Aromatizzanti	6.00

Tabella 3: Prezzi degli ingredienti [€/kg].

Caramella	Prezzo
Dolce	5.00
Delizia	4.00
Bacetto	8.00
Golosa	5.00
Sfizio	6.00
Slurp	7.50
Sweety	4.50

Tabella 4: Prezzi di vendita delle caramelle [€/kg].

Tutte le caramelle pesano 10 grammi.

Soluzione.

Il problema è una variante del classico problema del mix produttivo ottimale, in cui le quantità di risorsa consumata è variabile e limitata superiormente, anziché essere data, ed il consumo di risorse genera un termine di costo nella funzione obiettivo, che quindi non è la massimizzazione del ricavo ma del guadagno.

Dati. Indichiamo con P l'insieme indicizzato dei prodotti e con I l'insieme indicizzato degli ingredienti. Indichiamo con a_{ij} la percentuale di ingrediente $i \in I$ nel prodotto $j \in P$. Indichiamo con q_i la massima quantità acquistabile per ogni ingrediente $i \in I$. Indichiamo con p_i^a il costo di acquisto dell'ingrediente $i \in I$ e con p_j^v il prezzo di vendita del prodotto $j \in P$. Il dato sul peso di ogni caramella è inutile.

Variabili. Le variabili del problema sono le quantità $x_j \geq 0$ di prodotto per ogni $j \in P$ e le consumi $y_i \geq 0$ per ogni ingrediente $i \in I$. Tutte sono espresse in chilogrammi al giorno e sono continue e non-negative.

Vincoli. I vincoli legano le quantità prodotte e le quantità consumate e sono vincoli di uguaglianza.

$$\sum_{j \in P} \frac{a_{ij}}{100} x_j = y_i \quad \forall i \in I.$$

Esistono dei limiti superiori alle quantità consumabili per ogni ingrediente:

$$y_i \leq q_i \quad \forall i \in I.$$

Obiettivo. La funzione obiettivo da massimizzare è la differenza tra ricavi e costi.

$$\text{maximize } z = \sum_{j \in P} p_j^v x_j - \sum_{i \in I} p_i^a y_i.$$

Il modello risultante è di programmazione lineare. Pertanto la soluzione calcolata dai solutori è garantita essere ottima.

Nell'esempio proposto il valore ottimo del guadagno è pari a 310.802 euro al giorno. Nessuna variabile fuori base risulta avere costo ridotto nullo; quindi la soluzione ottima è unica.

Analisi post-ottimale.

1. Solo le caramelle con indice 3 (Bacetto), 6 (Slurp) e 7 (Sweety) sono convenienti.
2. Per ciascuna caramella non-conveniente il prezzo di vendita dovrebbe aumentare della quantità indicata qui di seguito (in €/kg), per rendere la caramella conveniente: 1 - Dolce: 0.675; 2 - Delizia: 2.4765; 4 - Golosa: 1.1845; 5 - Sfizio: 1.6975. Questi sono infatti i valori dei costi ridotti delle variabili (fuori-base) corrispondenti.

3. Per ciascuna caramella conveniente, per determinare il prezzo di vendita minimo per cui essa resta conveniente, non basta l'analisi post-ottimale. Infatti una volta che si verifica un cambio di base, ciò non implica necessariamente che la caramella diventi non conveniente. Bisogna invece eseguire l'analisi parametrica, finché la variabile x corrispondente alla caramella esce di base. Il modo più veloce è porre a 0 il valore di mercato della caramella, risolvere il modello e osservare il costo ridotto della caramella. Si ottengono i seguenti valori dei prezzi minimi (espressi in €/kg): 3 - Bacetto: 4.749128; 6 - Slurp: 6.20294; 7 - Sweety: 4.28529. Confrontandoli con i prezzi attuali, si ricava facilmente la variazione percentuale richiesta.
4. Se tutti i prezzi di vendita delle caramelle variano simultaneamente, mantenendo invariati i loro rapporti, è come se i ricavi venissero espressi in una diversa unità di misura rispetto ai costi. Poiché l'analisi post-ottimale si può fare rispetto ad un solo parametro per volta, si può procedere come in un problema a due obiettivi (ricavi e costi), modificando il peso di uno dei due rispetto all'altro. Si definisce una variabile r che rappresenta i ricavi e la si pone pari a

$$r = \sum_{j \in P} p_j^v x_j.$$

Si introduce poi un coefficiente $k = 1$, ridefinendo quindi l'obiettivo come

$$\text{maximize } z = kr - \sum_{i \in I} p_i^a y_i.$$

Ora, risolvendo il modello si ha l'informazione sul range di valori di k tra i due cambi di base.

Se il valore di k aumenta (deprezzamento della moneta locale rispetto a quella straniera, cambio favorevole all'esportazione) si ha un cambio di base per $k = 1.675$. Per tale valore entra in base la variabile x della caramella Dolce (indice 1), ma nessuna variabile x esce di base. Lo stesso accade con i successivi cambi di base. Le tre caramelle convenienti (Bacetto, Slurp e Sweety) rimangono convenienti.

Se invece il valore di k diminuisce (apprezzamento della moneta locale rispetto a quella straniera, cambio sfavorevole all'esportazione) si ha un cambio di base per $k = 0.93917$, in corrispondenza del quale la caramella Sweety (indice 7) esce di base.

5. All'ottimo nessuna delle due risorse è utilizzata in quantità pari al massimo. Quindi non ha senso acquistare quantità aggiuntive, nemmeno a costo zero.