

## Biscotti

Una ditta alimentare artigiana, leader nel suo settore, produce biscotti del mattino. Ogni tipo di biscotto contiene una data percentuale di ingredienti e richiede un certo tempo di lavorazione noto. L'addetto agli acquisti richiede che i quantitativi acquistati siano superiori a certi limiti minimi che consentono la stipula di contratti particolarmente vantaggiosi con i fornitori. Analogamente, l'addetto al marketing richiede che vengano messe in vendita certe quantità minime e massime per ogni tipo di biscotto. Le quantità minime sono dovute a motivi di immagine; quelle massime sono dovute a stime degli analisti di mercato.

L'azienda deve pianificare la sua produzione per il prossimo trimestre (12 settimane di 5 giorni lavorativi) ed ha a disposizione per il periodo in questione un certo budget.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file `BISCOTTI.TXT`.

Discure l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Analizzare poi le seguenti ipotesi.

1. Una multinazionale straniera sta valutando la possibilità di acquistare l'azienda e vuole sapere quanto rende il capitale investito in essa. Dare una risposta quantitativa e motivata.
2. Chiedendo un prestito bancario per il trimestre in questione, il budget potrebbe essere incrementato. Conoscendo l'interesse praticato dalla banca (pari al 6% nel trimestre), decidere se sia conveniente chiedere il prestito e, in caso affermativo, per quale somma e con quale convenienza.
3. Un'azienda specializzata in pubblicità di prodotti alimentari fa pervenire la seguente proposta: con una campagna pubblicitaria adeguata, centrata su un particolare tipo di biscotto, gli esperti di mercato stimano che sarebbe possibile raddoppiare la quantità vendibile (solo per il biscotto reclamizzato). Poiché la campagna avrebbe lo stesso costo indipendentemente dal tipo di biscotto, l'amministratore propone di farla e di concentrarla sul biscotto di prezzo massimo. Valutare la sua proposta.
4. Alcuni fornitori, alle prese con difficili problemi logistici di distribuzione dei prodotti, intendono alzare del 5% le quantità minime per le ordinazioni, per ricevere dai loro clienti ordinazioni trimestrali più consistenti. L'addetto agli acquisti è molto allarmato dall'alternativa tra dover accettare un aumento del prezzo degli ingredienti (non potendo più usufruire degli sconti per ordinazioni superiori al limite fissato) e dover accettare di fare ordinazioni maggiori col rischio di comprare più ingredienti di quanto occorra. Per quali ingredienti le sue preoccupazioni sono fondate?

### Esempio.

L'azienda produce quattro tipi di biscotti. La loro composizione è descritta in Tabella 1.

Ingrediente	Svegliallegra	Frollino del Mattino	Alba Splendente	ProntiVia!
Farina	20	25	30	20
Uova	15	0	10	20
Zucchero	20	15	25	10
Burro	0	0	10	10
Latte	10	20	20	15
Additivi	15	20	0	15
Nocciole	10	0	0	0
Acqua	10	20	5	10

Tabella 1: Composizione dei biscotti (percentuali di ingredienti).

I tempi di lavorazione sono ricavabili dalla tabella 2. Per ogni tipo di biscotto la tabella indica la quantità di produzione massima giornaliera [kg / giorno], ossia la massima quantità di biscotti che sarebbe ottenibile usando tutto l'impianto per un solo tipo di biscotto.

Biscotto	Max. produzione
Svegliallegra	165
Frollino del M.	250
Alba Splendente	500
ProntiVia!	250

Tabella 2: Produzione massima giornaliera [kg / giorno].

Biscotto	Prezzo
Svegliallegra	1.75
Frollino del M.	1.00
Alba Splendente	1.25
ProntiVia!	1.50

Tabella 3: Prezzi di vendita sono i seguenti [€/kg].

Budget disponibile per il trimestre: 21600 €.  
Costo della campagna pubblicitaria: 5000 € per ogni trimestre.

Ingrediente	Prezzo
Farina	0.50
Uova	2.00
Zucchero	0.50
Burro	1.00
Latte	1.50
Additivi	1.00
Nocciole	5.00

Tabella 4: Prezzi di acquisto degli ingredienti [€/kg].

Ingrediente	Quantità minima
Farina	450
Uova	200
Zucchero	320
Burro	140
Latte	320
Additivi	100
Nocciole	50

Tabella 5: Quantità minime di ingredienti da acquistare [kg/settimana].

Biscotto	Produzione minima	Produzione massima
Svegliallegria	50	300
Frollino del M.	100	500
Alba Splendente	500	1000
ProntiVia!	300	500

Tabella 6: Quantità minime e massime da produrre [kg/settimana].

### Soluzione.

*Dati.* Indichiamo con  $B$  l'insieme dei tipi di biscotti e con  $I$  l'insieme degli ingredienti. Notiamo che l'acqua non è vincolata né ha dei costi associati; pertanto essa può essere esclusa dall'insieme  $I$ . Indichiamo con  $a_{ib}$  la percentuale di biscotto  $b \in B$  composta dall'ingrediente  $i \in I$ . Indichiamo con  $\pi_b$  la produzione massima giornaliera per ogni biscotto  $b \in B$ , espressa in chilogrammi al giorno, e quindi con  $t_b = 1/\pi_b$  il tempo unitario di produzione del biscotto  $b \in B$ , espresso in giorni per chilogrammo. Indichiamo con  $p_b^v$  il prezzo di vendita del biscotto  $b \in B$ , espresso in euro al chilogrammo e con  $p_i^a$  il prezzo di acquisto dell'ingrediente  $i \in I$ , espresso in euro al chilogrammo. Indichiamo con  $\ell_i^{\min}$  la quantità minima di ingrediente  $i \in I$  da acquistare, espressa in chilogrammi per settimana, e con  $q_b^{\min}$  e  $q_b^{\max}$  le quantità minime e massime di produzione per ogni biscotto  $b \in B$ , espresse in chilogrammi per settimana. Siano, infine,  $\beta$  il budget disponibile per il trimestre,  $\gamma$  il numero di giorni lavorativi per ogni settimana e  $\sigma$  il numero di settimane per trimestre.

*Variabili.* Le variabili del problema sono le quantità  $x_b \geq 0$  di biscotti di tipo  $b \in B$  prodotte per ogni settimana e le quantità  $y_i \geq 0$  di ingredienti di tipo  $i \in I$  acquistate per ogni settimana. Tutte le variabili sono continue e non-negative e sono espresse in chilogrammi per settimana. Esse sono anche limitate inferiormente e superiormente:

$$\begin{aligned} q_b^{\min} &\leq x_b \leq q_b^{\max} \quad \forall b \in B \\ \ell_i^{\min} &\leq y_i \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

*Vincoli.* Il modello include anzitutto i vincoli sul consumo di risorse che sono tipici di tutte le varianti del problema del mix produttivo ottimale, espressi in chilogrammi per settimana:

$$\sum_{b \in B} \frac{a_{ib}}{100} x_b \leq y_i \quad \forall i \in I.$$

Inoltre esistono altre due risorse limitate che vincolano la produzione: il tempo (necessario per la produzione) ed il denaro (necessario per l'acquisto degli ingredienti). A queste due risorse limitate corrispondono quindi altri due vincoli espressi rispettivamente in giorni per settimana ed euro per settimana:

$$\begin{aligned} \sum_{b \in B} t_b x_b &\leq \gamma \\ \sum_{i \in I} p_i^a y_i &\leq \beta/\sigma. \end{aligned}$$

*Obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare è il guadagno, cioè la differenza tra il ricavo totale e il costo totale (espresso in euro per settimana):

$$\text{maximize } z = \sum_{b \in B} p_b^v x_b - \sum_{i \in I} p_i^a y_i.$$

Il modello risultante è di programmazione lineare. Quindi la soluzione fornita dai solutori è garantita essere ottima.

La soluzione ottima dell'esempio proposto vale circa 461 euro per settimana. Nessuna variabile fuori-base ha costo ridotto nullo; quindi la soluzione ottima di questo esempio è unica.

*Analisi post-ottimale.*

1. Per rispondere a questa prima domanda è comodo inserire nel modello due variabili ausiliarie che rappresentino il ricavo settimanale ed il costo settimanale. All'ottimo il ricavo settimanale è pari a 2261,02 euro ed il costo settimanale è di 1800 euro. Quindi il capitale investito nell'azienda rende circa il 25,6% per ogni settimana.
2. Per rispondere alla seconda domanda bisogna eseguire l'analisi parametrica sul termine noto del vincolo di budget, confrontando l'aumento del profitto con il costo dovuto all'interesse da pagare alla banca. Un incremento unitario del vincolo di budget (espresso in euro per settimana) corrisponde ad un aumento del budget trimestrale di  $\sigma = 12$  euro, che a sua volta genera un costo di 0,72 euro per gli interessi nel trimestre, pari a 0,06 euro per settimana. All'ottimo il costo ridotto del budget settimanale è pari a 0,0237389 euro per settimana. Quindi il prestito non conviene.
3. Per valutare l'effetto della campagna pubblicitaria si può eseguire l'analisi post-ottimale su ciascuno dei quattro tipi di biscotto, oppure si può inserire nel modello una variabile binaria  $w_b$  per ogni tipo di biscotto che indica se quello è il biscotto scelto per essere reclamizzato. I vincoli sulla quantità massime da produrre diventano perciò

$$x_b \leq q_b^{max}(1 + w_b) \quad \forall b \in B$$

con la condizione

$$\sum_{b \in B} w_b \leq 1.$$

Detto  $K$  il costo trimestrale della campagna pubblicitaria, al costo totale settimanale va quindi aggiunto un termine pari a  $K/\sigma \sum_{b \in B} w_b$ . Tale termine è non-negativo se la campagna viene effettuata, nullo altrimenti. Il modello che ne risulta è di PLI (file `Biscotti3.mod`) e la soluzione è garantita essere ottima. Si osserva che all'ottimo (file `Biscotti3.out`) tutte le variabili  $w$  sono nulle: la campagna pubblicitaria non conviene.

4. All'ottimo, uova, zucchero, burro e additivi sono già acquistati in eccedenza. Quindi se aumentassero del 5% la quantità minime  $\ell_i^{min}$  per questi ingredienti, aumenterebbero sicuramente i surplus inutilizzati. Per gli altri ingredienti, si può studiare grazie all'analisi di sensitività se un aumento del 5% dei valori di  $\ell_i^{min}$  provocherebbe un cambio di base. L'analisi

è corretta solo assumendo che uno solo dei limiti cambi. Per farina e nocchie non si avrebbe un cambio di base. Quindi l'effetto sarebbe un peggioramento del valore ottimo ma le quantità acquistate sarebbero ancora pienamente utilizzate. Nel caso del latte, invece si ha un cambio di base dopo un aumento di 14,5 kg/sett, quando il 5% di  $\ell^{min}$  è pari a 16 kg/sett. In questo caso, quindi bisogna proseguire con l'analisi parametrica, oppure semplicemente alzare il valore di  $\ell^{min}$  del latte da 320 a 336 kg/sett e risolvere nuovamente il modello, osservando che in questo caso il latte acquistato sarebbe comunque usato completamente; resterebbero i surplus di uova, zucchero e additivi ma non si avrebbe più surplus di burro.