Bin packing

Dato un insieme di oggetti di peso noto ed un insieme di contenitori identici di capacità (massimo peso trasportabile) nota, si vuole trovare il minimo numro di contenitori necessari per trasportare tutti gli oggetti.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio descritto dai dati indicati di seguito, discutendo ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Esempio

Gli oggetti sono 20. I contenitori sono 5. La loro capacità è pari a 700 kg. Il peso degli oggetti è indicato in Tabella 1.

Oggetto	Peso
1	144
2	172
3	153
4	131
5	126
6	109
7	165
8	149
9	108
10	84
11	199
12	160
13	182
14	129
15	107
16	161
17	130
18	167
19	128
20	94

Tabella 1: Peso degli oggetti da trasportare (kg).

Soluzione.

Dati. Indichiamo con N l'insieme indicizzato degli oggetti e con M l'insieme indicizzato dei contenitori. Indichiamo con a_i $\forall i \in N$ il peso di ogni oggetto e con b la capacità di ogni contenitore, entrambe espresse in chilogrammi.

Variabili. Utilizziamo una variabile binaria x_{ij} per indicare se l'oggetto $i \in N$ viene assegnato al contenitore $j \in M$ o no. Utilizziamo inoltre una variabile binaria y_j per indicare se il contenitore $j \in M$ viene usato o no.

Vincoli. I vincoli di assegnamento impongono che ogni oggetto sia assegnato ad almeno un contenitore. Possono essere espressi in forma di uguaglianza o di disuguaglianza, indifferentemente, poiché non è mai ottimale assegnare un oggetto più di una volta.

$$\sum_{j \in M} x_{ij} \geq 1 \quad \forall i \in N.$$

I vincoli di capacità limitano il peso totale degli oggetti assegnati ad uno stesso contenitore, quando esso viene usato:

$$\sum_{i \in N} a_i x_{ij} \leq b y_j.$$

Per i contenitori non usati, il termine noto vale 0 e questo è sufficiente a proibire tutti gli assegnamenti di oggetti ad essi. In alternativa, anziché moltiplicare il termine noto dei vincoli di capacità per le variabili y, si possono inserire vincoli disaggregati della forma

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall \in N, \forall j \in M,$$

che producono lo stesso effetto, cioè impediscono che esistano assegnamenti a contenitori non usati. Tuttavia essi risultano più deboli (meno stringenti) e quindi la formmulazione, ancorché corretta, richiede più tempo di calcolo per essere risolta.

Obiettivo. Si vuole minimizzare il numero di contenitori usati:

$$\text{minimize } z = \sum_{j \in M} y_j.$$

Il modello risultante è un semplice modello di PL con variabili binarie.

La soluzione trovata dai solutori è garantita essere ottima. Non ne è garantita l'unicità. In particolare, se i contenitori sono identici, ogni loro permutazione genera una soluzione equivalente. Perciò di ogni soluzione si danno $|M|!$ versioni equivalenti. Comunque, anche inserendo vincoli di eliminazione delle simmetrie, la soluzione ottima potrebbe non essere unica.