

Azienda.

Un'azienda alimentare dispone di due impianti produttivi dislocati a qualche chilometro di distanza tra loro e di un unico magazzino, che li rifornisce entrambi di materie prime. Gli stabilimenti produttivi lavorano le stesse materie prime ma producono prodotti diversi. Poiché il magazzino non è equidistante dai due stabilimenti, i costi di trasporto verso il primo e verso il secondo non sono uguali. Attualmente tutte le materie prime vengono suddivise in parti uguali per rifornire i due stabilimenti. Non è consentito lasciare residui di materie prime in magazzino.

Si vuole

1. analizzare la situazione attuale e determinare se può essere ottimizzata senza modificare le quantità di materie prime rifornite ai due stabilimenti;
2. ottimizzare il funzionamento dell'azienda, supponendo di poter modificare la frazione di materie prime rifornite al primo e al secondo stabilimento, mantenendola però uguale per tutte le materie prime;
3. ottimizzare il funzionamento dell'azienda supponendo di poter suddividere a piacimento tra i due stabilimenti ogni materia prima indipendentemente dalle altre.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio descritto nel file `AZIENDA.TXT`. Discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Relativamente all'ultimo scenario studiato,

1. valutare l'effetto che avrebbe la possibilità di lasciare gli eventuali residui di materie prime in magazzino;
2. dire se e come il denaro speso per l'acquisto delle materie prime potrebbe essere speso meglio.

Esempio.

L'azienda produce dolci indicati da p_1, \dots, p_8 nei due stabilimenti A e B.

I costi di trasporto delle materie prime sono i seguenti: da magazzino a stabilimento A: 20 euro al quintale; da magazzino a stabilimento B: 15 euro al quintale.

Prodotto	Stabilimento	Produtz. attuale
p1	A	3
p2	A	10
p3	A	3
p4	A	6
p4	B	10
p5	A	3
p5	B	5
p6	B	2
p7	B	1
p8	B	4

Tabella 1: Produzione attuale (migliaia di confezioni per settimana).

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
a	21	32	45	30	21	40	42	37
b	5	4	8	10	12	15	13	12
c	64	65	79	82	66	65	80	91
d	30	25	28	29	32	34	46	28
e	45	44	44	38	46	32	49	30
f	6	8	8	8	11	11	12	4
g	95	94	90	23	12	57	59	62

Tabella 2: Coefficienti tecnologici della produzione (in grammi di materia prima per ogni confezione). Le righe corrispondono alle materie prime; le colonne ai prodotti.

Mat.pr.	Quantità
a	1890
b	780
c	3720
d	1400
e	2200
f	580
g	4200

Tabella 3: Disponibilità di materie prime in magazzino (kg/settimana).

Prodotto	Prezzo
p1	2.10
p2	2.10
p3	2.50
p4	2.30
p5	1.80
p6	2.40
p7	3.15
p8	2.60

Tabella 4: Prezzi di vendita dei prodotti (Euro/confezione).

Soluzione.

Dati. Siano P l'insieme dei prodotti, M l'insieme delle materie prime e S l'insieme degli stabilimenti. Sia a_{mp} il coefficiente tecnologico, espresso in grammi di materia prima $m \in M$ necessaria per produrre una confezione di dolci di tipo $p \in P$. Sia b_m la disponibilità settimanale di materia prima $m \in M$ in magazzino, espressa in chilogrammi. Sia c_p il prezzo di vendita di ogni prodotto $p \in P$, espresso in euro per confezione. Sia t_s il costo di trasporto verso lo stabilimento $s \in S$, espresso in euro per quintale di materia prima trasportata.

Variabili. Definiamo x_{ps} la produzione settimanale di prodotto $p \in P$ nello stabilimento $s \in S$, espressa in numero di confezioni.

Vincoli. I vincoli sul consumo di risorse sono per ogni stabilimento ed ogni materia prima:

$$\sum_{p \in P} \frac{a_{mp}}{1000} x_{ps} \leq 0.5 b_m \quad \forall s \in S, m \in M$$

dove il coefficiente 1000 serve a trasformare i grammi in chilogrammi ed il coefficiente 0,5 esprime il vincolo che ogni materia prima viene trasportata per metà in uno stabilimento e per metà nell'altro.

Obiettivo. L'obiettivo è la differenza tra due termini, che rappresentano i ricavi e i costi.

$$\text{maximize } z = \sum_{p \in P, s \in S} c_p x_{ps} - \sum_{m \in M, s \in S} t_s (0.5 b_m / 100)$$

dove il coefficiente 100 serve a trasformare i chilogrammi in quintali.

Classificazione. Il problema è una variante del classico problema del mix produttivo ottimale, in cui si vuole massimizzare il ricavo dell'azienda, conoscendo le materie prime disponibili e i vincoli tecnologici sulla produzione. Il modello è di programmazione lineare. Pertanto la soluzione calcolata dai solutori è garantita essere ottima.

1. Primo scenario (file **AZIENDA1.MOD**). Nell'esempio descritto si ha un profitto settimanale di $z^* = 116486.3589$ euro con ricavi settimanali pari a 119071 euro e costi settimanali pari a 2584.75 euro. La produzione attuale quindi non è ottimizzata: il suo valore si può calcolare fissando le variabili x ai valori dati nella tabella 1 (file **AZIENDA0.MOD**) e vale 101765.25 euro a settimana.
2. Secondo scenario. Nel secondo scenario (file **AZIENDA2.MOD**) si impone che la frazione sia la stessa per tutte le materie prime, ma che sia variabile, anziché pari a 1/2: si introduce quindi una variabile compresa tra 0 e 1, per indicare la scelta. Nel modello sono state introdotte per comodità due variabili λ_s con il vincolo che la loro somma sia pari a 1.

La possibilità di variare la ripartizione delle risorse produrrebbe un drastico cambio nella produzione: verrebbe usato soltanto lo stabilimento B. L'incremento del profitto sarebbe trascurabile rispetto alla soluzione ottima del primo scenario.

3. Terzo scenario. Nel terzo scenario (file **AZIENDA3.MOD**) le frazioni di materia prima λ_s , destinate ad ogni stabilimento $s \in S$, possono essere diverse per materie prime diverse. Quindi servono variabili λ_{sm} con due indici, che sommano a 1 per ogni materia prima $m \in M$. La possibilità di frazionare le materie prime indipendentemente l'una dall'altra non causerebbe alcun cambiamento nella produzione rispetto al secondo scenario.

Per consentire che materie prime residue restino nel magazzino, basta trasformare i vincoli di uguaglianza

$$\sum_{s \in S} \lambda_{sm} = 1 \quad \forall m \in M$$

in vincoli di disuguaglianza

$$\sum_{s \in S} \lambda_{sm} \leq 1 \quad \forall m \in M.$$

Poiché le materie prime b , e ed f non sono utilizzate del tutto, la possibilità di non trasportarle dal magazzino agli stabilimenti consente di diminuire i costi di trasporto senza modificare la produzione e di conseguenza i ricavi. Pertanto il valore ottimo migliora (file **AZIENDA4.MOD**).

Sempre a causa del surplus di materie prime b , e ed f , un miglior uso del denaro consisterebbe nell'acquistare minori quantità di b , e ed f e acquistare maggiori quantità delle altre quattro materie prime, che sono scarse.