Anti-trust

Per effetto di una nuova normativa anti-trust, una grande azienda deve dividersi in un dato numero di aziende di dimensioni minori. Naturalmente i dirigenti designati al vertice di ciascuna delle aziende minori competono per accaparrarsi la maggior parte del mercato dell'azienda-madre. Per dirimere la controversia, bisogna formulare matematicamente il problema e trovare quindi la partizione dimostrabilmente ottima. L'azienda-madre vende un dato numero di prodotti tramite un dato insieme di filiali sparse per il mondo e si conosce quanto fattura ciascuna filiale per ciascun tipo di prodotto. Ciascuna delle filiali è indivisibile e deve essere assegnata ad una delle nuove aziende. Si vuole che le aziende prodotte dalla partizione abbiano quote il più uniformi possibili di mercato per tutti i prodotti; si vuole quindi minimizzare la massima differenza tra i loro fatturati rispetto ad uno stesso prodotto.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati dell'esempio indicato nel seguito.

Come cambierebbe il problema e come cambierebbe la soluzione ottima se si volesse minimizzare la differenza di fatturato *complessivo* tra le nuove aziende? Che relazione esiste tra i due problemi?

Esempio

Le filiali sono 10, i prodotti sono 5. I fatturati sono riportati nella tabella 1.

Filiale	A	B	C	D	E
1	15000	20000	18000	58000	2400
2	20000	10000	20000	57000	1900
3	18000	23000	17500	55500	9820
4	21000	12000	16800	48000	6000
5	12500	10000	10950	62000	7800
6	13750	22000	14400	60000	2500
7	20500	21000	21000	59800	1980
8	14250	23800	21500	55500	3450
9	10800	14180	25400	53250	6500
10	13700	13980	20100	57500	4000

Tabella 1: Fatturato per ogni filiale (riga) e per ogni prodotto (colonna) espresso in migliaia di euro per anno.

Soluzione

Dati. Sia F l'insieme delle filiali e P l'insieme dei prodotti. Sia k il numero di aziende generate dalla partizione dell'azienda originale e sia quindi $K = 1, \ldots, k$ l'insieme indicizzato di tali aziende. Sia f_{ij} il fatturato di ogni filiale $i \in F$ per ogni prodotto $j \in P$.

Variabili. Utilizziamo variabili binarie x_{ik} per indicare l'attribuzione della filiale $i \in F$ all'azienda $k \in K$.

Vincoli. Si vuole che ogni filiale sia assegnata ad un'azienda:

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in F.$$

Obiettivo. Il fatturato di ogni azienda $k \in K$ su ogni prodotto $j \in P$ è dato da $\sum_{i \in F} f_{ij} x_{ik}$. Quindi, per minimizzare il massimo sbilanciamento (funzione-obiettivo "min-max") bisogna introdurre una variabile ausiliaria δ da minimizzare, che rappresenta il massimo sbilanciamento, e per ogni prodotto $j \in P$ e per ogni coppia di aziende $k' \in K$ e $k'' \in K$ il vincolo

$$\delta \geq \sum_{i \in F} f_{ij} x_{ik'} - \sum_{i \in F} f_{ij} x_{ik''} \quad \forall j \in P, \forall k', k'' \in K.$$

L'obiettivo è

$$\text{minimize } z = \delta.$$

Il problema è di PLI ed è una generalizzazione del problema di Subset Sum, che è NP-hard: con un solo prodotto, infatti, il problema diventa quello di partizionare gli elementi di un insieme in due sottoinsiemi di peso il più uniforme possibile.

Se il problema richiedesse solo di partizionare in modo uniforme il fatturato complessivo si potrebbero sommare i valori dei fatturati per ogni filiale e si avrebbe appunto un problema di Subset Sum (NP-hard).

Si può notare come la soluzione ottima nei due casi sia diversa e come lo sbilanciamento massimo sia inferiore nel secondo caso rispetto al primo (80 anziché 8400). Infatti, poiché il secondo problema si ottiene dal primo sommando i vincoli tra loro, il secondo problema è un rilassamento del primo.