

# L'algoritmo del simplesso rivisto

Ricerca operativa

Giovanni Righini



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI MILANO

## L'algoritmo *revised simplex*

Per eseguire i test di ammissibilità e ottimalità e scegliere il pivot su cui eseguire la prossima iterazione non è necessario conoscere tutti i coefficienti del tableau.

L'idea quindi è di rappresentare il tableau in un modo alternativo, ma equivalente, risparmiando alcune operazioni.

A questo scopo si sfrutta la dualità.

## Coppia duale

Consideriamo un problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \text{P) minimize } z &= c^T x \\ \text{subject to } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

con  $n + m$  variabili non-negative e  $m$  vincoli di uguaglianza.

Il suo duale è

$$\begin{aligned} \text{D) maximize } w &= b^T y \\ \text{subject to } A^T y &\leq c \end{aligned}$$

con  $m$  variabili libere e  $m + n$  vincoli di disuguaglianza.

## Base primale

Scelta una base di  $m$  colonne, il primale si può riscrivere come segue:

$$\begin{aligned} \text{P) minimize } z &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{subject to } & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0. \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= [B|N] \\ x^T &= [x_B|x_N] \\ c^T &= [c_B|c_N] \end{aligned}$$

## Base duale

Il duale si può mettere a sua volta in forma standard, inserendo variabili non-negative di slack:

$$\begin{aligned} \text{D) maximize } w &= b^T y \\ \text{subject to } A^T y + s &= c \end{aligned}$$

con  $m$  variabili  $y$  libere,  $m + n$  variabili  $s \geq 0$  e  $m + n$  equazioni.

Dato che  $A^T = \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix}$ , il duale si può riscrivere come segue:

$$\begin{aligned} \text{D) maximize } w &= b^T y \\ \text{subject to } B^T y + s_B &= c_B \\ N^T y + s_N &= c_N. \end{aligned}$$

Per il teorema degli scarti complementari, per ogni coppia di basi primale/duale che si corrispondono si ha

$$x_i s_i = 0.$$

Quindi  $s_B = 0$ .

## Base duale

Da  $B^T y = c_B$  si ottiene

$$y = (B^T)^{-1} c_B.$$

Da  $N^T y + s_N = c_N$ , si ottiene

$$\begin{aligned} s_N &= c_N - N^T (B^T)^{-1} c_B = \\ &= c_N - N^T (B^{-1})^T c_B = \\ &= c_N - (B^{-1} N)^T c_B. \end{aligned} \tag{1}$$

Nel primale invece si ha

$$x_B = B^{-1} b$$

$$x_N = 0.$$

Così le soluzioni primale e duale si possono calcolare a partire da  $B$ ,  $N$  e i dati **iniziali**.

## Cambio di base

Per eseguire un passo di pivot, si sceglie una variabile primale fuori base con costo ridotto negativo, cioè con colonna  $q \in N$  tale che  $s_q < 0$ .

Indichiamo con  $T = B^{-1}A$  il tableau corrente (che non vogliamo calcolare esplicitamente). Sia  $T_q$  la sua colonna (l'unica che calcoliamo esplicitamente) corrispondente alla variabile  $x_q$ :

$$T_q = B^{-1}A_q,$$

dove  $A_q$  indica la colonna  $q$  della matrice  $A$ .

Indichiamo con  $p \in B$  l'indice della variabile primale uscente:

$$p = \operatorname{argmin}_{i: T_{iq} > 0} \left\{ \frac{(x_B)_i}{T_{iq}} \right\},$$

dove  $(x_B)_i$  indica il valore della variabile che è in base sulla riga  $i$ .

Il nuovo valore di  $x_q$ , entrando in base, è  $x'_q = \frac{(x_B)_p}{T_{pq}}$ .

## Cambio di base

Diamo una descrizione algebrica dell'operazione di pivot dalla soluzione di base  $x$  alla soluzione di base  $x'$ , sapendo che:

$$Ax = b \quad Ax' = b$$

perchè entrambe le soluzioni sono ammissibili,

$$x_N = 0 \quad x'_i = 0 \quad \forall i \in N \setminus \{q\}.$$

Poiché

$$b = Ax = Bx_B$$

$$b = Ax' = Bx'_B + A_q x'_q,$$

si ha

$$x'_B = x_B - B^{-1} A_q x'_q.$$

Nel duale

$$y^T = c_B^T B^{-1}$$

$$A_q^T y + s_q = c_q \quad \text{ossia} \quad s_q = c_q - y^T A_q.$$

## Obiettivo

Il valore dell'obiettivo  $z$  dopo il pivot è

$$\begin{aligned}z' &= c^T x' = c_B^T x'_B + c_q x'_q = \\&= c_B^T x_B - c_B^T B^{-1} A_q x'_q + c_q x'_q = \\&= c_B^T x_B - y^T A_q x'_q + c_q x'_q = \\&= c_B^T x_B - (c_q - s_q) x'_q + c_q x'_q = \\&= c_B^T x_B + s_q x'_q = z + s_q x'_q.\end{aligned}$$

Se l'iterazione non è degenera,  $s_q < 0$  e  $x'_q > 0$  implicano  $z' < z$ .

Quindi tutto ciò che serve per procedere con le iterazioni dell'algoritmo del simplesso ( $x$ ,  $y$ ,  $s$ ,  $z$ ) può essere calcolato a partire dai dati iniziali eseguendo solo prodotti tra vettore e matrice e non tra matrici, pur di conoscere  $B^{-1}$ .

## Algoritmo del simplesso rivisto

- Calcolare i valori duali  $y^T = c_B^T B^{-1}$ .
- Cercare una variabile fuori base  $x_q$  con costo ridotto  $r_q = c_q - y^T A_q < 0$ .
- Se non ne esiste nessuna, stop: soluzione ottima.
- Calcolare la colonna  $q$  del tableau corrente  $T_q = B^{-1} A_q$ .
- Scegliere la riga di pivot  $p = \operatorname{argmin}_{i: T_{iq} > 0} \left\{ \frac{(x_B)_i}{T_{iq}} \right\}$ .
- Eseguire il pivot, modificando  $B$ , calcolando i nuovi termini noti  $x_B$  ed incrementando  $z$  di  $r_q x'_q$ .

## Fattorizzazione $LU$

Per calcolare rapidamente l'inversa di  $B$ , si rappresenta  $B = LU$  come prodotto tra

- una matrice  $L$  *unit lower triangular* (gli elementi sulla diagonale hanno valore 1 e sopra la diagonale hanno valore 0);
- una matrice  $U$  *upper triangular* (gli elementi sotto la diagonale hanno valore 0).

Il calcolo di  $T_q = B^{-1}A_q$ , cioè tale che  $BT_q = A_q$ , si divide in due step:

- Trovare  $d : Ld = A_q$
- Trovare  $T_q : UT_q = d$ .

Analogamente, il calcolo di  $y = (B^{-1})^T c_B$ , cioè tale che  $B^T y = c_B$ , si divide in due step:

- Trovare  $d : U^T d = c_B$
- Trovare  $y : L^T y = d$ .

Tutti questi step sono calcolabili efficientemente per eliminazione Gaussiana.

## Aggiornamento di $L$ e $U$

Nel passaggio da  $B$  a  $B'$ , quando  $x_q$  entra in base e  $x_p$  esce, bisogna aggiornare efficientemente  $L$  e  $U$ .

$L^{-1}B = U$  è triangolare superiore.

Sia  $j$  l'indice della colonna di  $U$  che corrisponde a  $x_p$ .

$L^{-1}B'$  è ancora triangolare superiore tranne che nella colonna  $j$ .

## Aggiornamento di $L$ e $U$

Con

- una permutazione ciclica delle colonne che sposta  $j$  in fondo e tutte le colonne da  $j + 1$  a  $n$  a sinistra di una posizione,
- una permutazione ciclica delle righe che sposta la riga  $j$  in fondo e tutte le righe da  $j + 1$  a  $n$  in alto di una posizione,

si ottiene una nuova matrice triangolare superiore con in aggiunta alcuni elementi non-zero sull'ultima riga.

Essa si può esprimere come prodotto tra una matrice  $L'$  identica a  $L$  tranne che nell'ultima riga ed una matrice  $U'$  identica alla matrice permutata tranne che nell'ultimo elemento in basso a destra.

Anche questi nuovi coefficienti si ricavano in modo efficiente per eliminazione Gaussiana.

## Esempio

$$L^{-1}B = U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ & & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ & & & u_{44} & u_{45} \\ & & & & u_{55} \end{bmatrix} \quad L^{-1}A_q = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che la colonna modificata sia  $j = 2$ .

$$L^{-1}B' = \begin{bmatrix} u_{11} & w_1 & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ & w_2 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ & w_3 & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ & w_4 & & u_{44} & u_{45} \\ & w_5 & & & u_{55} \end{bmatrix}$$

Indichiamo con  $P_j$  la matrice della permutazione ciclica da  $j$  a  $n$ .

$$P_j L^{-1} B' P_j^T = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & w_1 \\ & u_{33} & u_{34} & u_{35} & w_3 \\ & & u_{44} & u_{45} & w_4 \\ & & & u_{55} & w_5 \\ & u_{23} & u_{24} & u_{25} & w_2 \end{bmatrix}$$

## Esempio

La matrice

$$P_j L^{-1} B' P_j^T = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & w_1 \\ & u_{33} & u_{34} & u_{35} & w_3 \\ & & u_{44} & u_{45} & w_4 \\ & & & u_{55} & w_5 \\ u_{23} & u_{24} & u_{25} & & w_2 \end{bmatrix}$$

è il prodotto di due matrici triangolari  $L_1$  e  $U_1$ :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & l_{52} & l_{53} & l_{54} & 1 \end{bmatrix} \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & w_1 \\ & u_{33} & u_{34} & u_{35} & w_3 \\ & & u_{44} & u_{45} & w_4 \\ & & & u_{55} & w_5 \\ & & & & \hat{w}_2 \end{bmatrix}$$

## Esempio

I valori dei nuovi coefficienti si calcolano per eliminazione Gaussiana.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & w_1 \\ & u_{33} & u_{34} & u_{35} & w_3 \\ & & u_{44} & u_{45} & w_4 \\ & & & u_{55} & w_5 \\ u_{23} & u_{24} & u_{25} & & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & l_{52} & l_{53} & l_{54} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & w_1 \\ & u_{33} & u_{34} & u_{35} & w_3 \\ & & u_{44} & u_{45} & w_4 \\ & & & u_{55} & w_5 \\ & & & & \hat{w}_2 \end{bmatrix}$$

$$l_{52} u_{33} = u_{23}$$

$$l_{52} u_{34} + l_{53} u_{44} = u_{24}$$

$$l_{52} u_{35} + l_{53} u_{45} + l_{54} u_{55} = u_{25}$$

$$l_{52} w_3 + l_{53} w_4 + l_{54} w_5 + \hat{w}_2 = w_2$$

Quindi la nuova fattorizzazione  $B' = L'U'$  si ottiene così:

$$L_1 U_1 = P_j L^{-1} B' P_j^T \Leftrightarrow L_1 U_1 = (P_j L^{-1} L')(U' P_j^T)$$

$$L_1 = P_j L^{-1} L' \text{ e quindi } L' = L P_j^T L_1$$

$$U_1 = U' P_j^T \text{ e quindi } U' = U_1 P_j.$$