

Soluzioni di base estese

Ricerca operativa

Giovanni Righini



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

PL con variabili limitate

Si consideri il problema di PL

$$\begin{aligned} & \text{minimize } c^T x \\ & \text{subject to } Ax = b \\ & \quad d^- \leq x \leq d^+ \end{aligned}$$

in cui le variabili hanno limiti inferiori e superiori.

Rappresentando i limiti sulle variabili come vincoli di disuguaglianza, quando le corrispondenti variabili di slack/surplus sono fuori-base, i vincoli sono attivi.

In alternativa, si può evitare di introdurre vincoli espliciti con relative variabili di slack/surplus, definendo soluzioni di base estese, in cui ogni variabile limitata può essere fuori-base in due modi diversi, che rendono attivo uno dei suoi limiti.

PL con variabili limitate

Definiamo **soluzione di base estesa** una soluzione in cui

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} (b - N^- d_{N^-}^- - N^+ d_{N^+}^+) \\ x_{N^-} = d_{N^-}^- \\ x_{N^+} = d_{N^+}^+ \end{cases}$$

dove

- N^- è la sottomatrice delle variabili fuori-base pari al loro limite inferiore,
- N^+ è la sottomatrice delle variabili fuori-base pari al loro limite superiore.

Se

$$d_B^- \leq x_B \leq d_B^+,$$

la soluzione di base estesa è **ammissibile**.

Riformulazione

Con il cambio di variabili

$$\begin{cases} y_B = x_B \\ y_{N^-} = x_{N^-} - d_{N^-}^- \\ y_{N^+} = d_{N^+}^+ - x_{N^+} \end{cases}$$

si può riformulare il problema:

$$\text{minimize } c_B y_B + c_{N^-} y_{N^-} + c_{N^+} y_{N^+} + \dots$$

$$\text{s.t. } B y_B + N^-(y_{N^-} + d_{N^-}^-) - N^+(y_{N^+} - d_{N^+}^+) = b$$

$$d_B^- \leq y_B \leq d_B^+$$

$$0 \leq y_N \leq d_N^+ - d_N^-$$

da cui si ricavano i valori delle variabili in base

$$\hat{y}_B = B^{-1} (b - N^-(y_{N^-} + d_{N^-}^-) + N^+(y_{N^+} - d_{N^+}^+)).$$

Soluzione di base del problema riformulato

Sostituendo

$$\hat{y}_B = B^{-1} (b - N^{-}(y_{N^{-}} + d_{N^{-}}^{-}) + N^{+}(y_{N^{+}} - d_{N^{+}}^{+}))$$

e ricordando che

$$y_B = B^{-1} (b - N^{-}d_{N^{-}}^{-} - N^{+}d_{N^{+}}^{+}),$$

si può riscrivere il problema come segue:

$$\text{minimize } y_{N^{-}} (c_{N^{-}} - c_B(B^{-1}N^{-})) - y_{N^{+}} (c_{N^{+}} - c_B(B^{-1}N^{+})) + \dots$$

$$\text{s.t. } \hat{y}_B - d_B^{+} \leq B^{-1}N^{-}y_{N^{-}} - B^{-1}N^{+}y_{N^{+}} \leq \hat{y}_B - d_B^{-}$$

$$0 \leq y_N \leq d_N^{+} - d_N^{-}.$$

Condizioni di ottimalità

Dall'obiettivo del problema riformulato,

$$y_{N^-} (c_{N^-} - c_B(B^{-1}N^-)) - y_{N^+} (c_{N^+} - c_B(B^{-1}N^+)) + \dots$$

si ricavano le espressioni dei costi ridotti \bar{c} per le variabili fuori-base nei due casi:

- se A^j è una colonna di N^- : $\bar{c}_j = +c_j - c_B(B^{-1}A^j)$;
- se A^j è una colonna di N^+ : $\bar{c}_j = -c_j + c_B(B^{-1}A^j)$.

Le condizioni di ottimalità $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j \in N$ per il problema riformulato equivalgono quindi nel problema originale alle condizioni di ottimalità seguenti:

- $c_j - c_B(B^{-1}A^j) \geq 0 \quad \forall j \in N^-$
- $c_j - c_B(B^{-1}A^j) \leq 0 \quad \forall j \in N^+$.

All'ottimo, le variabili fuori-base con un valore pari al loro **limite superiore** devono avere **costo ridotto non-positivo**.

Pivot con soluzioni di base estese

Se le condizioni di ottimalità non sono verificate, allora esiste almeno una variabile fuori-base y_p tale che $\bar{c}_p < 0$.

Facendo un passo di pivot, tutte le altre variabili fuori-base restano fuori-base. Quindi fissiamo $y_j = 0 \forall j \in N, j \neq p$.

Pivot con soluzioni di base estese

Indichiamo per brevità

$$\tilde{a} = \begin{cases} B^{-1}A^p & \text{se } p \in N^- \\ -B^{-1}A^p & \text{se } p \in N^+. \end{cases}$$

Il problema

$$\begin{aligned} & \text{minimize } y_{N^-} (c_{N^-} - c_B(B^{-1}N^-)) - y_{N^+} (c_{N^+} - c_B(B^{-1}N^+)) + \dots \\ & \text{s.t. } \hat{y}_B - d_B^+ \leq B^{-1}N^- y_{N^-} - B^{-1}N^+ y_{N^+} \leq \hat{y}_B - d_B^- \\ & \quad 0 \leq y_N \leq d_N^+ - d_N^- \end{aligned}$$

si può quindi riscrivere come

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \bar{c}_p y_p \\ & \text{s.t. } \hat{y}_B - d_B^+ \leq \tilde{a} y_p \leq \hat{y}_B - d_B^- \\ & \quad 0 \leq y_p \leq d_p^+ - d_p^-. \end{aligned}$$

Pivot con soluzioni di base estese

La soluzione ottima \hat{y}_p del problema

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \bar{c}_p y_p \\ & \text{s.t. } \hat{y}_B - d_B^+ \leq \tilde{a} y_p \leq \hat{y}_B - d_B^- \\ & \quad 0 \leq y_p \leq d_p^+ - d_p^- \end{aligned}$$

si ricava facilmente dai vincoli, indicando con $\beta(i)$ l'indice della variabile in base corrispondente alla riga i :

$$\hat{y}_p = \min \left\{ \min_{i:\tilde{a}_i > 0} \frac{\hat{y}_{\beta(i)} - d_{\beta(i)}^-}{\tilde{a}_i}, \min_{i:\tilde{a}_i < 0} \frac{d_{\beta(i)}^+ - \hat{y}_{\beta(i)}}{-\tilde{a}_i}, d_p^+ - d_p^- \right\}.$$

Pivot con soluzioni di base estese

Si danno quindi tre casi possibili ad ogni passo di pivot:

- se esiste una riga q con $\hat{y}_p = \frac{\hat{y}_{\beta(q)} - d_{\beta(q)}^-}{\tilde{a}_q} = \frac{\hat{x}_{\beta(q)} - d_{\beta(q)}^-}{\tilde{a}_q}$, allora p esce da N ed entra in B , mentre $\beta(q)$ esce da B ed entra in N^- ;
- se esiste una riga q con $\hat{y}_p = \frac{d_{\beta(q)}^+ - \hat{y}_{\beta(q)}}{-\tilde{a}_q} = \frac{d_{\beta(q)}^+ - \hat{x}_{\beta(q)}}{-\tilde{a}_q}$, allora p esce da N ed entra in B , mentre $\beta(q)$ esce da B ed entra in N^+ ;
- se $\hat{y}_p = d_p^+ - d_p^-$, allora p passa da N^+ a N^- o viceversa (e x_p passa dal valore d_p^+ al valore d_p^- o viceversa).