Soluzioni di base estese

Ricerca operativa

Giovanni Righini

Università degli Studi
di Milano

PL con variabili limitate

Si consideri il problema di PL

$$\begin{aligned} \text{minimize } & c^T x \\ \text{subject to } & Ax = b \\ & d^- \leq x \leq d^+ \end{aligned}$$

in cui le variabili hanno limiti inferiori e superiori.

Rappresentando i limiti sulle variabili come vincoli di disuguaglianza, quando le corrispondenti variabili di slack/surplus sono fuori-base, i vincoli sono attivi.

In alternativa, si può evitare di introdurre vincoli espliciti con relative variabili di slack/surplus, definendo soluzioni di base estese, in cui ogni variabile limitata può essere fuori-base in due modi diversi, che rendono attivo uno dei suoi limiti.

Soluzioni di base estese

Definiamo soluzione di base estesa una soluzione in cui

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}\left(b - N^- d^-_{N^-} - N^+ d^+_{N^+}\right) \\ x_{N^-} = d^-_{N^-} \\ x_{N^+} = d^+_{N^+} \end{cases}$$

dove

- N^- è la sottomatrice delle variabili fuori-base pari al loro limite inferiore,
- N^+ è la sottomatrice delle variabili fuori-base pari al loro limite superiore.

Se

$$d^-_B \leq x_B \leq d^+_B,$$

la soluzione di base estesa è ammissibile.

Riformulazione

Con il cambio di variabili

$$\begin{cases} y_B = x_B \\ y_{N^-} = x_{N^-} - d^-_{N^-} \\ y_{N^+} = d^+_{N^+} - x_{N^+} \end{cases}$$

si può riformulare il problema:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & c_B^T y_B + c_{N^-}^T y_{N^-} - c_{N^+}^T y_{N^+} + \dots \\ \text{s.t. } & B y_B + N^-(y_{N^-} + d^-_{N^-}) - N^+(y_{N^+} - d^+_{N^+}) = b \\ & d^-_B \le y_B \le d^+_B \\ & 0 \le y_N \le d^+_N - d^-_N \end{aligned}$$

da cui si ricavano i valori delle variabili in base in funzione di quelle fuori base:

$$y_B = B^{-1}\left(b - N^-(y_{N^-} + d^-_{N^-}) + N^+(y_{N^+} - d^+_{N^+})\right).$$

Soluzione di base del problema riformulato

Sostituendo

$$y_B = B^{-1}\left(b - N^-(y_{N^-} + d^-_{N^-}) + N^+(y_{N^+} - d^+_{N^+})\right)$$

e ricordando che i valori di y_B nella soluzione di base sono dati da

$$\hat{y}_B = B^{-1}\left(b - N^- d^-_{N^-} - N^+ d^+_{N^+}\right),$$

si può riscrivere il problema come segue:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \ & \left(c^T_{N^-} - c^T_B B^{-1} N^-\right) y_{N^-} - \left(c^T_{N^+} - c^T_B B^{-1} N^+\right) y_{N^+} + \dots \\ \text{s.t.} \ & \hat{y}_B - d^+_B \leq B^{-1} N^- y_{N^-} - B^{-1} N^+ y_{N^+} \leq \hat{y}_B - d^-_B \\ & 0 \leq y_N \leq d^+_N - d^-_N . \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Dall'obiettivo del problema riformulato,

$$\left(c_{N^-}^T - c_B^T B^{-1} N^-\right) y_{N^-} - \left(c_{N^+}^T - c_B^T B^{-1} N^+\right) y_{N^+} + \dots$$

si ricavano le espressioni dei costi ridotti $\overline{c}$ per le variabili fuori-base nei due casi:

- se A^j è una colonna di N^-: $\overline{c}_j = +c_j - c_B^T B^{-1} A^j$;
- se A^j è una colonna di N^+: $\overline{c}_j = -c_j + c_B^T B^{-1} A^j$.

La condizioni di ottimalità $\overline{c}_j \geq 0 \ \ \forall j \in N$ per il problema riformulato equivalgono quindi nel problema originale alle condizioni di ottimalità seguenti:

- $c_j - c_B^T B^{-1} A^j \geq 0 \ \ \forall j \in N^-$
- $c_j - c_B^T B^{-1} A^j \leq 0 \ \ \forall j \in N^+$.

All'ottimo, le variabili fuori-base con un valore pari al loro limite superiore devono avere costo ridotto non-positivo.

Pivot con soluzioni di base estese

Se le condizioni di ottimalità non sono verificate, allora esiste almeno una variabile fuori-base y_p tale che $\overline{c}_p < 0$.

Facendo un passo di pivot, tutte le altre variabili fuori-base restano fuori-base. Quindi fissiamo $y_j = 0 \; \forall j \in N, j \neq p$.

Pivot con soluzioni di base estese

Indichiamo per brevità

$$\tilde{a} = \begin{cases} B^{-1}A^{p} & \text{se } p \in N^{-} \\ -B^{-1}A^{p} & \text{se } p \in N^{+}. \end{cases}$$

Il problema

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \left(c_{N^-}^T - c_B^T B^{-1} N^-\right) y_{N^-} - \left(c_{N^+}^T - c_B^T B^{-1} N^+\right) y_{N^+} + \dots \\ \text{s.t. } & \hat{y}_B - d_B^+ \leq B^{-1} N^- y_{N^-} - B^{-1} N^+ y_{N^+} \leq \hat{y}_B - d_B^- \\ & 0 \leq y_N \leq d_N^+ - d_N^- \end{aligned}$$

si può quindi riscrivere come

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \overline{c}_p y_p \\ \text{s.t. } & \hat{y}_B - d_B^+ \leq \tilde{a} y_p \leq \hat{y}_B - d_B^- \\ & 0 \leq y_p \leq d_p^+ - d_p^- . \end{aligned}$$

Pivot con soluzioni di base estese

La soluzione ottima $\hat{y}_p$ del problema

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \overline{c}_p y_p \\ \text{s.t. } & \hat{y}_B - d_B^+ \leq \tilde{a} y_p \leq \hat{y}_B - d_B^- \\ & 0 \leq y_p \leq d_p^+ - d_p^- \end{aligned}$$

si ricava facilmente dai vincoli, indicando con $\beta(i)$ l'indice della variabile in base corrispondente alla riga i:

$$\hat{y}_p = \min \left\{ \min_{i:\tilde{a}_i > 0} \frac{\hat{y}_{\beta(i)} - d^-_{\beta(i)}}{\tilde{a}_i}, \min_{i:\tilde{a}_i < 0} \frac{d^+_{\beta(i)} - \hat{y}_{\beta(i)}}{-\tilde{a}_i}, d_p^+ - d_p^- \right\}.$$

Pivot con soluzioni di base estese

Si danno quindi tre casi possibili ad ogni passo di pivot:

- se esiste una riga q con $\hat{y}_p = \frac{\hat{y}_{\beta(q)} - d^-_{\beta(q)}}{\tilde{a}_q} = \frac{\hat{x}_{\beta(q)} - d^-_{\beta(q)}}{\tilde{a}_q}$, allora p esce da N ed entra in B, mentre $\beta(q)$ esce da B ed entra in N^-;
- se esiste una riga q con $\hat{y}_p = \frac{d^+_{\beta(q)} - \hat{y}_{\beta(q)}}{-\tilde{a}_q} = \frac{d^+_{\beta(q)} - \hat{x}_{\beta(q)}}{-\tilde{a}_q}$, allora p esce da N ed entra in B, mentre $\beta(q)$ esce da B ed entra in N^+;
- se $\hat{y}_p = d^+_p - d^-_p$, allora p passa da N^+ a N^- o viceversa (e x_p passa dal valore d^+_p al valore d^-_p o viceversa).