Modelli di ottimizzazione discreta

Giovanni Righini

Ricerca Operativa

Università degli Studi
di Milano

Ottimizzazione discreta

Molto spesso le variabili nei problemi di ottimizzazione rappresentano quantità, che possono essere continue o discrete.

Il secondo caso si ha quando le quantità sono necessariamente multipli interi di unità non frazionabili: numero di pallets in un container, numero di persone in un gruppo, numero di veicoli da utilizzare per un trasporto...

Questi casi danno origine a modelli con variabili intere, solitamente non-negative e con un dominio finito.

Variabili binarie

In altri casi, invece, le variabili non rappresentano quantità e quindi

- non hanno un'unità di misura
- non ammettono approssimazioni.

Si tratta dei modelli con variabili binarie, che hanno come dominio l'insieme $\{0, 1\}$.

Le variabili binarie hanno un'enorme importanza dal punto di vista modellistico.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{capita evento } i \\ 0 & \text{non capita evento } i \end{cases}$$

Variabili binarie

Le relazioni tra variabili binarie esprimono condizioni logiche:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \leq 1 \Leftrightarrow \text{Non deve capitare più di uno tra } N \text{ eventi}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \Leftrightarrow \text{Deve capitare uno tra } N \text{ possibili eventi}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \geq 1 \Leftrightarrow \text{Deve capitare almeno uno di } N \text{ possibili eventi}$$

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \text{I due eventi devono capitare entrambi oppure nessuno dei due}$$

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \text{L'evento 1 può verificarsi solo se si verifica l'evento 2}$$

Variabili binarie

Le variabili binarie sono usate per selezionare sottinsiemi di un insieme:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \Leftrightarrow \sum_{i \in S} c_i$$

dove S è un sottinsieme di $\{1, \ldots, N\}$ corrispondente al vettore caratteristico x:

$$x_i = \begin{cases} 1 & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases}$$

Variabili binarie

Le variabili binarie sono usate per eliminare i “se” dai modelli.

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq u & \text{se } x = 1 \\ y = 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq ux$$

Esempio: rappresentazione di costi fissi.

Se investo e produco, ho costi $c(y) = c_f + c_v y$, con $0 \leq y \leq Q$.
Se non investo e non produco, ho costi nulli $c(y) = 0$ e produzione nulla $y = 0$.
Rappresentiamo la scelta con una variabile binaria x.

$$x = \begin{cases} 1 & \text{investo e produco} \\ 0 & \text{non investo e non produco} \end{cases}$$

Ora il modello può essere espresso così:

$$\begin{aligned} c(y) &= c_f x + c_v y \\ 0 \leq y &\leq Qx \end{aligned}$$

Attivazione/disattivazione di vincoli

Le variabili binarie possono essere usate anche per attivare e disattivare vincoli.

$$y \leq Q + Mx$$

con M “abbastanza grande”, equivale a

$$\begin{cases} y \leq Q & \text{se } x = 0 \\ y \text{ qualsiasi} & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Esempio: vincoli disgiuntivi

Supponiamo di voler imporre il vincolo

$$|a - b| \geq k$$

essendo a e b due variabili continue non-negative e $k > 0$ dato. Scritto così, il vincolo non è lineare ed è un vincolo disgiuntivo.

$$|a - b| \geq k \Leftrightarrow (a - b \geq k) \vee (a - b \leq -k)$$

Si può linearizzare introducendo una variabile binaria x ed una costante M “abbastanza grande”:

$$\begin{cases} a - b \geq k - Mx \\ a - b \leq -k + M(1 - x) \end{cases}$$

A seconda del valore di x, uno dei due vincoli viene imposto mentre l’altro risulta disattivato.

Esempio: regioni non convesse

Supponiamo di voler imporre che un punto di coordinate (x, y) non sia interno ad un rettangolo con lati paralleli agli assi, base $2a$, altezza $2b$ e centro nell'origine.
La regione ammissibile definita da questo vincolo non è convessa. Il punto non è interno quando

$$(x \leq -a) \vee (x \geq a) \vee (y \leq -b) \vee (y \geq b).$$

Almeno una delle quattro condizioni deve essere vera. Introduciamo 4 variabili binarie w'_x, w''_x, w'_y e w''_y, che disattivano i vincoli quando valgono 1.

$$\begin{cases} x \geq a - Mw'_x \\ x \leq -a + Mw''_x \\ y \geq b - Mw'_y \\ y \leq -b + Mw''_y \\ w'_x + w''_x + w'_y + w''_y \leq 3 \end{cases}$$

Esempio: problemi di scheduling

Nei problemi di scheduling bisogna decidere in che ordine eseguire n jobs di durata nota (*processing time*) $p_i \ \forall i = 1, \dots, n$ su una o più macchine.

Indicando con una variabile t_i l'istante di inizio di ogni job i, i vincoli di non-sovrapposizione tra jobs assegnati alla stessa macchina sono del tipo:

$$\begin{cases} t_j \geq t_i + p_i & \text{se } i \text{ precede } j \\ t_i \geq t_j + p_j & \text{se } j \text{ precede } i \end{cases}$$

Uno dei due vincoli deve essere imposto, mentre l'altro deve essere disattivato. Introducendo una variabile binaria x_{ij} per ogni coppia (non ordinata) $[i, j]$, si ha

$$\begin{cases} t_j - t_i \geq p_i - Mx_{ij} \\ t_i - t_j \geq p_j - M(1 - x_{ij}) \end{cases}$$

Occorrono però $n(n-1)/2$ variabili binarie.