Programmazione (lineare) a molti obiettivi

Ricerca operativa

Giovanni Righini

Università degli Studi
di Milano

Programmazione a molti obiettivi

La programmazione a molti obiettivi è l'estensione della programmazione matematica al caso in cui siano presenti più funzioni obiettivo in conflitto tra loro, cioè tali che il miglioramento rispetto ad una comporti un peggioramento rispetto ad un'altra.

L'ambito di applicazione della programmazione a molti-obiettivi è vastissimo.

In questo corso ci limiteremo a considerare il caso di problemi di programmazione lineare con due obiettivi.

Due fasi distinte

In presenza di problemi di ottimizzazione con più obiettivi, il processo risolutivo prevede due fasi distinte:

- Prima fase: calcolo della regione Pareto-ottima, cioè dell'insieme delle soluzioni ammissibili non-dominate.
- Seconda fase: scelta di una soluzione tra quelle Paretiane, individuate nella prima fase.

La prima fase è puramente algoritmica, mentre la seconda implica scelte del decisore.

Per risolvere un problema di ottimizzazione con più obiettivi non si può più utilizzare il concetto di soluzione ottima.

Se gli obiettivi sono in conflitto, nessuna soluzione è ottima.

Il concetto di soluzione ottima viene quindi sostituito da quello di soluzione non-dominata.

Dominanza

Dati gli obiettivi $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ da minimizzare e date due soluzioni ammissibili x' e x'', x' domina x'' se e solo se

$$\begin{cases} f_i(x') \leq f_i(x'') \; \forall i = 1, \ldots, k \\ \exists j \in \{1, \ldots, k\} : f_j(x') < f_j(x'') \end{cases}$$

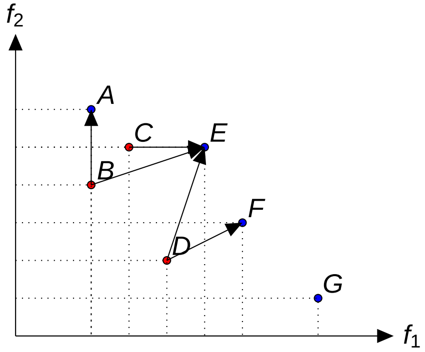
In caso di massimizzazione, bisogna invertire il segno delle disequazioni.

L'insieme delle soluzioni non-dominate è la regione Pareto-ottima del problema.

Obiettivo dell'analisi di un problema a molti-obiettivi è anzitutto determinare con opportuni algoritmi la sua regione Pareto-ottima (prima fase).

Regione Pareto-ottima

Le soluzioni e la regione Pareto-ottima possono essere rappresentate non solo nello spazio delle variabili, ma anche nello spazio degli obiettivi.



Soluzioni Paretiane e dominate nello spazio degli obiettivi
(due obiettivi da massimizzare).

Metodo dei pesi

Il metodo dei pesi consiste nell'ottimizzare una combinazione convessa delle funzioni-obiettivo.

maximize $f_1(x)$
maximize $f_2(x)$
maximize $\ldots$
maximize $f_k(x)$
s.t. $x \in X$

maximize $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)$
s.t. $x \in X$

con $\lambda_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, k$
e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Ovviamente la soluzione ottima del problema risultante dipende dal vettore dei pesi λ.

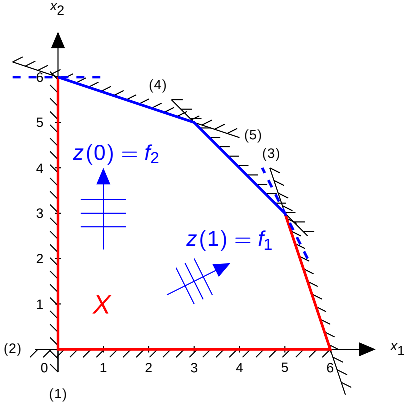
Con due obiettivi lineari e vincoli lineari si può calcolare la regione Paretiana con l'analisi parametrica.

Esempio

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } f_1 &= 2x_1 + x_2 \\
\text{maximize } f_2 &= x_2 \\
\text{s.t. } 3x_1 + x_2 &\leq 18 \\
x_1 + x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

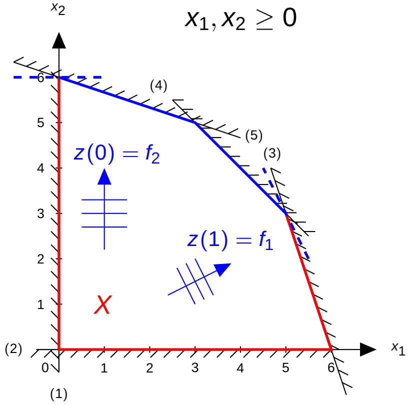
$$\lambda = [\alpha \;\; 1-\alpha] \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z &= 2\alpha x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } 3x_1 + x_2 &\leq 18 \\
x_1 + x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



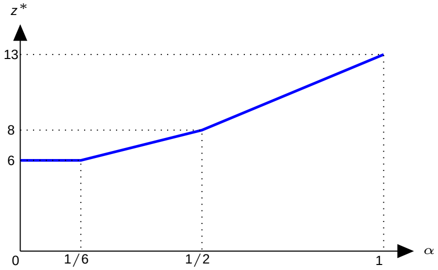
Esempio

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = & \; 2\alpha x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } & \; 3x_1 + x_2 \leq 18 \\
& \; x_1 + x_2 \leq 8 \\
& \; x_1 + 3x_2 \leq 18 \\
& \; x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Analisi parametrica su α:

$$
\begin{array}{lll}
0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6} & x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} & z^* = 6 \\
\frac{1}{6} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} & x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} & z^* = 5 + 6\alpha \\
\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 & x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & z^* = 3 + 10\alpha
\end{array}
$$



Metodo dei vincoli

Il metodo dei vincoli consiste nell'ottimizzare una delle funzioni-obiettivo, trasformando le altre in vincoli con un termine noto parametrico.

$$
\begin{array}{l}
\text{maximize } f_1(x) \\
\text{maximize } f_2(x) \\
\text{maximize } \ldots \\
\text{maximize } f_k(x) \\
\text{s.t. } x \in X
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & f_1(x) \\
\text{s.t.} & x \in X \\
 & f_i(x) \geq \beta_i \ \forall i = 2, \ldots, k.
\end{array}
$$

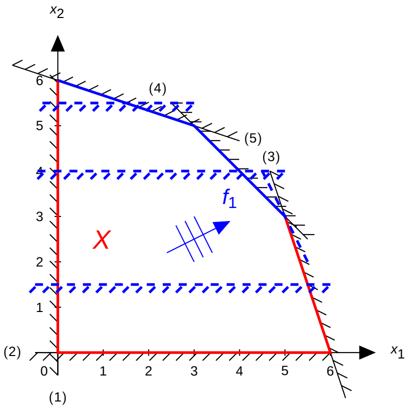
Ovviamente la soluzione ottima del problema risultante dipende dal vettore dei termini noti β.

Con due obiettivi lineari e vincoli lineari si può calcolare la regione Paretiana con l'analisi parametrica.

Esempio

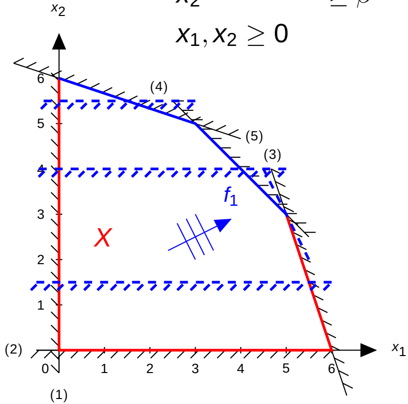
$$
\begin{aligned}
\text{maximize } f_1 &= 2x_1 + x_2 \\
\text{maximize } f_2 &= x_2 \\
\text{s.t. } 3x_1 + x_2 &\leq 18 \\
x_1 + x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } f_1 &= 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } 3x_1 + x_2 &\leq 18 \\
x_1 + x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\
x_2 &\geq \beta \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



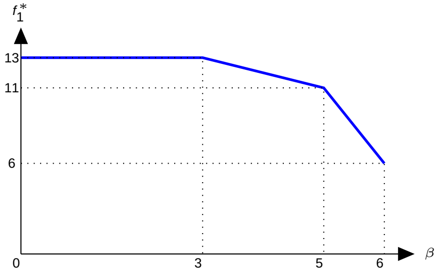
Esempio

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } f_1 = {} & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \le 18 \\
& x_1 + x_2 \le 8 \\
& x_1 + 3x_2 \le 18 \\
& x_2 \ge \beta \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



Analisi parametrica su β:

$$
\begin{array}{lll}
\beta \le 3 & x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & f_1^* = 13 \\
3 \le \beta \le 5 & x^* = \begin{bmatrix} 8-\beta \\ \beta \end{bmatrix} & f_1^* = 16 - \beta \\
5 \le \beta \le 6 & x^* = \begin{bmatrix} 18-3\beta \\ \beta \end{bmatrix} & f_1^* = 36 - 5\beta
\end{array}
$$

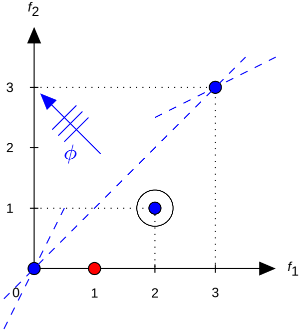


Regioni paretiane continue e discrete

Per problemi lineari nel continuo, il metodo dei pesi e dei vincoli generano correttamente la regione paretiana.

Nel discreto, invece, il metodo dei pesi in generale non garantisce di trovare tutte le soluzioni paretiane: possono esistere soluzioni paretiane che non sono ottime per alcuna scelta dei pesi.

$$\begin{aligned}
\text{minimize } f_1 &= y_1 + y_2 + y_3 \\
\text{maximize } f_2 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t. } 2x_1 &\leq y_2 + y_3 \\
2x_2 &\leq y_1 + y_3 \\
2x_3 &\leq y_1 + y_2 \\
x &\in \{0, 1\} \\
y &\in \{0, 1\}
\end{aligned}$$



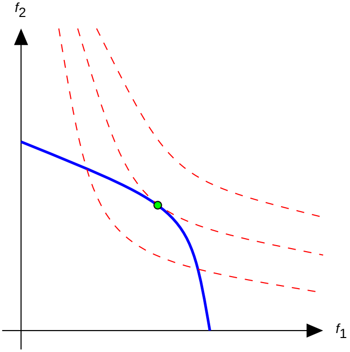
Seconda fase: scelta di una soluzione

La seconda fase del processo decisionale può essere supportata da metodi quantitativi, benché richieda una scelta, non demandabile ad un algoritmo, da parte del decisore.

Esistono vari metodi utilizzabili a questo scopo. Ad esempio:

- Metodo delle curve di indifferenza
- Criterio della massima curvatura
- Criterio del punto utopia
- Criterio degli standard

Metodo delle curve di indifferenza



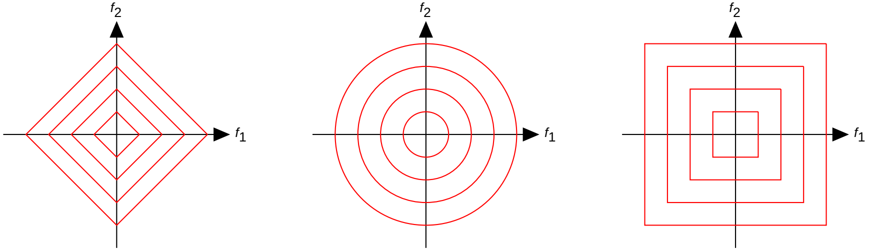
La soluzione scelta è quella in cui una delle curve di indifferenza risulta tangente alla regione Paretiana.

Metodo delle curve di indifferenza

Alcune curve di indifferenza comunemente usate per avere un'espressione analitica:

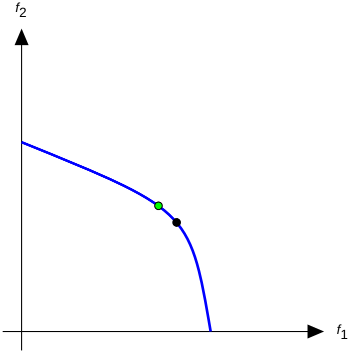
$$\omega(f(x)) = \left[\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i f_i(x))^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ad esempio, con $k = 1$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:



$p = 1$ $p = 2$ $p \to \infty$

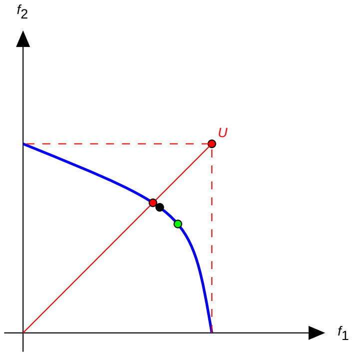
Criterio del punto di massima curvatura



La soluzione scelta è quella per cui ad un piccolo miglioramento di un obiettivo corrisponde un grande peggioramento dell'altro.

Criterio del punto-utopia

Il punto-utopia è la soluzione (in generale non-ammissibile) che nello spazio degli obiettivi ha come coordinate i valori ottimi di ciascuno.



Criterio degli standard

Gli standard sono valori-soglia al di sotto dei quali non si vuole che gli obiettivi possano peggiorare.