1 Rainbow Spanning Forest Problem

Dato un grafo $G = (V, E)$ ed una partizione dei suoi lati in sottinsiemi E_k per $k \in K$, dove K è un insieme di colori, trovare una copertura di tutti i vertici del grafo con un insieme di minima cardinalità di alberi eterocromatici, cioè alberi composti da lati di colori tutti diversi tra loro.

Il problema è NP-hard anche per $k = 2$, cioè dove la copertura dei vertici del grafo si può ottenere solo con edge singoli e con coppie di edge adiacenti e di colore diverso.

Possibile riformulazione estesa per branch-and-price, in cui ogni colonna è un albero eterocromatico.

Master problem.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } z = & \sum_{t \in T} \theta_t \\
\text{s.t. } & \sum_{t \in T} y_i t \theta_t \geq 1 && \forall i \in V \\
& \theta_t \in \{0, 1\} && \forall t \in T.
\end{aligned}
$$

Sia $\lambda_i \geq 0$ la variabile duale dei vincoli di covering per ogni vertice $i \, inV$, nel rilassamento continuo del master.

Pricing problem.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } \overline{c} = & 1 - \sum_{i \in V} \lambda_i y_i \\
\text{s.t. } & \sum_{i \in V} r_i = 1 && && (1) \\
& \sum_{j \in V} (f_{ji} - f_{ij}) = y_i - (t+1) r_i && \forall i \in V && (2) \\
& f_{ij} \leq t x_{[i,j]} && \forall [i,j] \in E && (3) \\
& \sum_{[i,j] \in E_k} x_{[i,j]} \leq 1 && \forall k \in K && (4) \\
& r_i \leq y_i && \forall i \in V && (5) \\
& x_{[i,j]} \in \{0, 1\} && \forall [i,j] \in E && (6) \\
& y_i \in \{0, 1\} && \forall i \in V && (7) \\
& r_i \in \{0, 1\} && \forall i \in V && (8) \\
& f_{ij} \geq 0 && \forall i \in V, j \in V && (9)
\end{aligned}
$$

Il parametro t indica la cardinalità dell'albero (numero di edges che lo compongono). Il pricing andrebbe ri-eseguito per ogni cardinalità t. Forse anche per ogni scelta della radice dell'albero.

Ogni var. binaria y_i indica se il vertice $i \in V$ è coperto dall'albero o no. Ogni var. binaria r_i indica se il vertice $i \in V$ è la radice dell'albero o no. Ogni var. binaria $x_{[i,j]}$ indica se il lato (non orientato) $[i, j]$ fa parte dell'albero o no. Ogni var. continua (intera) f_{ij} indica il flusso da $i \in V$ a $j \in V$ e serve a garantire che tutti i vertici con $y = 1$ siano connessi con la radice dell'albero.

I vincoli (1) impongono che esista una radice dell'albero. I vincoli (2) impongono che la radice emetta $t + 1$ unità di flusso e che ogni vertice dell'albero (inclusa la radice stessa) assorba una unità di flusso. I vincoli (3) impongono che venga usato l'edge $[i, j]$ se esiste flusso positivo da i a j. I vincoli (4) impongono che l'albero sia eterocromatico. I vincoli

(5) impongono che la radice sia uno dei vertici visitati; questi vincoli dovrebbero essere ridondanti, a causa dei vincoli (2) e della capacità massima t degli edges.

Non serve imporre esplicitamente che gli edges scelti formino un sottinsieme aciclico, perché non è mai ottimale inserire più edges del necessario e chiudere un ciclo non consente di coprire vertici in più.

Bisogna progettare un opportuno algoritmo di pricing e una strategia di branching.

Riferimenti.

Cerrone, Dragone, Sciomachen, *A Branch & Bound algorithm for the Rainbow Spanning Forest Problem*, ODS 2024.

Fanno un B&B che risolve in meno di un secondo istanze piccole. Non si sa come vada su istanze grandi.

Carrabs, Cerrone, Cerulli, Silvestri, *The Rainbow Spanning Forest Problem*, Optimization Letters 12 (2018)