

Laboratorio di Algoritmi

Progetto “Tic-Tac-Toe” (febbraio 2024)

Nota: La scadenza del progetto è fissata per lunedì 12 febbraio **compreso**.

Nota: Si consiglia di controllare gli eventuali aggiornamenti di questo documento, che potrebbero riportare le risposte a dubbi degli studenti e la correzione di eventuali errori, e di consultare il documento con le indicazioni tassative e le informazioni utili per svolgere e consegnare correttamente il progetto.

Il problema Il gioco del Tic-Tac-Toe (in italiano, Tris) è ben noto a tutti. Si gioca su una scacchiera di tre righe e tre colonne, inizialmente vuota. A turno, i due giocatori mettono una pedina su una cella della scacchiera: le pedine del primo giocatore sono indicate con X, quelle del secondo con O¹. Il gioco termina quando uno dei due giocatori ha occupato completamente con le proprie pedine una delle tre righe, una delle tre colonne o una delle due diagonali; in tal caso, la partita è vinta dal giocatore che ha raggiunto il risultato. Se questo non avviene, il gioco termina quando tutte le celle della scacchiera sono occupate; in tal caso, la partita è patta.

Si vogliono elencare tutte le posizioni che possono verificarsi durante il gioco. Si vuole anche determinare per ciascuna se si tratti di una posizione vincente, perdente o patta per il giocatore che da essa deve muovere, nell'ipotesi che entrambi i giocatori procedano razionalmente. La distinzione è semplice nel caso delle posizioni terminali: basta applicare le regole indicate sopra. Se invece si considera una posizione non terminale, la sua natura dipende dall'analisi di tutte le possibili posizioni seguenti. In dettaglio:

- se almeno una delle posizioni generate è vincente per il giocatore che muove, allora anche la posizione di partenza è vincente per tale giocatore, perché si suppone che il giocatore scelga di muovere in una di tali posizioni;
- se nessuna delle posizioni generate è vincente, ma almeno una è patta, allora anche la posizione di partenza è patta, perché si suppone che il giocatore scelga una mossa che lo porta a pareggiare, dato che non può vincere con certezza;
- se tutte le posizioni generate sono perdenti per il giocatore che muove, allora anche la posizione di partenza è perdente per tale giocatore, perché non c'è modo di evitare la sconfitta contro un giocatore razionale.

È quindi chiaro che occorre prima generare tutte le posizioni, evitando di produrre copie ridondanti (cioè posizioni identiche raggiunte per vie differenti) e arrestandosi nelle posizioni terminali. Quindi, bisogna marcare le posizioni terminali in base alle regole che indicano il vincitore, e risalire alle posizioni precedenti, determinando per ciascuna la corretta marcatura in base a quella delle posizioni immediatamente successive. Questo significa che è necessario conservare per ogni posizione l'elenco di quelle da essa generate.

Terminata l'analisi del primo gioco, consideriamo un altro problema definito sugli stessi elementi. Si tratta per prima cosa di enumerare tutte le posizioni ottenute ponendo sulla scacchiera tre pedine per ciascuno dei due giocatori. Fra queste posizioni, si considerano terminali quelle contenenti tre pedine dello stesso giocatore nella stessa riga, colonna o diagonale. Le altre posizioni, invece, possono essere trasformate con la mossa di una sola pedina dalla cella corrente a una adiacente in verticale, in orizzontale o in diagonale. Questo darà luogo a sottoinsiemi

¹Per convenzione usiamo la lettera O, non la cifra 0.

di posizioni vicendevolmente raggiungibili attraverso catene di mosse. Si vuole determinare una serie di informazioni sulla struttura così ottenuta. Precisamente, si vuole sapere quante posizioni si producono, quante mosse sono complessivamente lecite, quanti gruppi di posizioni raggiungibili a vicenda vengono generati, quali sono le loro cardinalità e qual è il numero massimo di mosse strettamente necessario a produrre una posizione partendo da un'altra che appartenga allo stesso gruppo.

Il progetto Il progetto non ha dati, essendo interamente specificato dalle regole dei due giochi analizzati. Questo rischia di rendere banale l'analisi di complessità, dato che ovviamente il numero di strutture da considerare, operazioni necessarie e celle in memoria risulta una costante. Per evitarlo, l'analisi andrà condotta rispetto al lato ℓ della scacchiera, cioè al numero di righe e di colonne. Val la pena di osservare che molti dei risultati richiesti potrebbero essere ottenuti (decisamente con maggiore eleganza) ragionando in modo formale; procederemo però computazionalmente per fare un esercizio di implementazione utile per situazioni in cui ciò non sia possibile.

Il primo risultato del progetto è il numero di posizioni del gioco del Tic-Tac-Toe, da riportare su una riga, seguito dalla parola chiave **posizioni**.

5478 posizioni

Riporteremo quindi il numero delle posizioni che risultano vincenti per il primo giocatore e per il secondo giocatore, ciascuno su una riga e seguito dalle parole chiave **vincenti per** e dal simbolo del giocatore.

2936 vincenti per X

1474 vincenti per O

Quindi, stamperemo l'elenco delle posizioni, una per riga, riportando per ciascuna:

- una stringa di 9 caratteri che descrivono la posizione, ottenuta scorrendo la scacchiera riga per riga e indicando con X e O le celle occupate dalle pedine dei due giocatori e con . quelle libere;
- uno spazio bianco;
- un carattere che indica se la posizione sia vincente per il primo giocatore (X), vincente per il secondo (O) o patta (-).

Le posizioni devono essere ordinate per numero di pedine crescente; a pari numero di pedine, vanno ordinate lessicograficamente rispetto alla stringa descrittiva di 9 caratteri. Ad esempio, la riga:

..... -

corrisponde alla posizione iniziale, che garantisce a chi muove di ottenere la parità, mentre la riga:

XO..XO..X X

corrisponde alla posizione

XO.

.XO

..X

che è vincente per il primo giocatore. La prima delle due righe di esempio è per definizione la prima dell'intero elenco, dato che non contiene alcuna pedina. Per

questo compito, è lecito sfruttare l'ipotesi che il carattere - preceda 0 e questo preceda X.

I risultati dell'analisi del secondo problema si aprono con una riga che riporta il numero di posizioni, seguito dalla parola chiave **posizioni**.

1680 posizioni

Quindi, riporteremo il numero di mosse lecite, seguito dalla parola chiave mosse.

22436 mosse

Seguirà il numero di gruppi di posizioni vicendevolmente raggiungibili, seguito dalla parola chiave **gruppi**. Per ogni possibile cardinalità, da 1 sino al numero di posizioni, indicheremo quanti gruppi hanno tale cardinalità seguiti dalla parola chiave **posizioni:**², dal numero di gruppi che la assumono e dalla parola chiave **gruppi**. Per esempio:

309 gruppi

1 posizioni: 308 gruppi

1372 posizioni: 1 gruppi

indica l'esistenza di 309 gruppi, dei quali 308 sono costituiti da una sola posizione e 1 costituito dalle rimanenti 1372 posizioni.

Infine, riporteremo il numero massimo di mosse necessario a passare da una posizione a un'altra dello stesso gruppo, preceduto dalla parola chiave **Mosse massime:**.

Mosse massime: 11

²Per semplicità al plurale, anche se c'è tali gruppi hanno cardinalità unitaria.