Laboratorio di Algoritmi

Corso di Laurea in Matematica

Roberto Cordone

DI - Università degli Studi di Milano

Lezioni:	Martedì 8.30 - 10.30 in aula 8	Mercoledì 10.30 - 13.30 in aula 2
	Giovedì 15.30 - 18.30 in aula 2	Venerdì 10.30 - 12.30 in aula 3
Ricevimento:	su appuntamento (Dipartimento di Informatica)	
E-mail:	roberto.cordone@unimi.it	
Pagina web:	http://homes.di.unimi.it/~cordone/courses/2023-algo/2023-algo.html	
Sito Ariel:	https://mgoldwurma.ariel.ctu.unimi.it	

Lezione 16: Algoritmo greedy

Milano, A.A. 2022/23

Nei problemi di Ottimizzazione Combinatoria

- una soluzione x è un sottoinsieme di un dato insieme base B finito
- le soluzioni appartengono a una famiglia $X \subseteq 2^B$
  di sottoinsiemi che soddisfano opportune condizioni
- la funzione obiettivo $f : X \to \mathbb{N}$ dà un valore a ogni soluzione

Si tratta di trovare una soluzione di valore minimo o massimo in X

Algoritmo esaustivo: trova una soluzione ottima ma è esponenziale

- alcuni problemi di OC ammettono algoritmi polinomiali esatti
- tutti i problemi di OC ammettono algoritmi polinomiali euristici,
  cioè che non garantiscono di trovare l'ottimo su ogni istanza

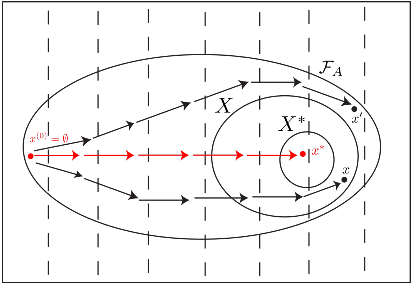
Gli algoritmi greedy

Un algoritmo greedy A aggiorna ad ogni passo t un sottoinsieme $x^{(t)}$:

1. in $t = 0$ parte da un sottoinsieme vuoto: $x^{(0)} = \emptyset$
   (*perché ovviamente è parte di una soluzione ottima*)
2. termina se nessun sottoinsieme più grande può essere ottimo:
   $$x \cup \{i\} \notin \mathcal{F}_A \text{ per ogni } i \in B \setminus x$$
   $\mathcal{F}_A$ raccoglie i potenziali sottoinsiemi di soluzioni ottime
   (*potenziali, non sempre sicuri*)
3. fra gli elementi $i \in B \setminus x$ tali che $x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A$
   sceglie l'elemento $i^{(t)}$ che ottimizza un criterio $\phi_A(i, x)$
   (*tiene x "ammissibile" e cerca di tenerlo "ottimo"*)
4. aggiunge $i^{(t)}$ al sottoinsieme corrente $x^{(t)}$: $x^{(t+1)} := x^{(t)} \cup \{i^{(t)}\}$
   (*non si torna più indietro nella scelta!*)
5. torna al punto 2

Per alcuni problemi, trova soluzioni ottime; per altri no

Un grafico



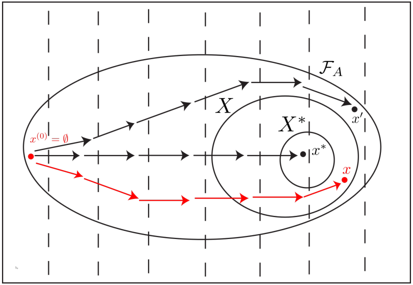
L'algoritmo visita una catena di sottoinsiemi $\emptyset = x^{(0)} \subset \ldots \subset x^{(k)}$

Può terminare

- in una soluzione ottima $x^* \in X^*$
- in una soluzione ammissibile non ottima $x \in X$
- in un sottoinsieme non ammissibile x'

Esempi: *albero ricoprente minimo, zaino unitario*

Un grafico



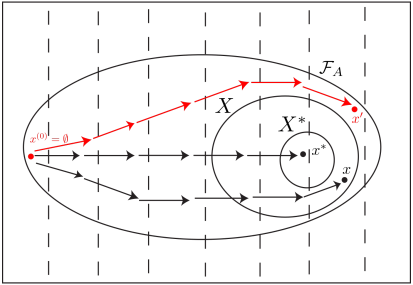
L'algoritmo visita una catena di sottoinsiemi $\emptyset = x^{(0)} \subset \ldots \subset x^{(k)}$

Può terminare

- in una soluzione ottima $x^* \in X^*$
- in una soluzione ammissibile non ottima $x \in X$
- in un sottoinsieme non ammissibile x'

Esempio: zaino generico

Un grafico



L'algoritmo visita una catena di sottoinsiemi $\emptyset = x^{(0)} \subset \ldots \subset x^{(k)}$

Può terminare

- in una soluzione ottima $x^* \in X^*$
- in una soluzione ammissibile non ottima $x \in X$
- in un sottoinsieme non ammissibile x'

L'algoritmo greedy base

L'algoritmo *greedy* più semplice è quello in cui

- la funzione obiettivo è additiva: $f(x) = \sum_{i \in x} \phi_i$

  e non negativa: $\phi_i \geq 0$ per ogni $i \in B$
- si sceglie l'elemento ammissibile che produce il sottoinsieme migliore

$$i^* = \arg \max_{i \in B \setminus x : x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A} f(x \cup \{i\}) = \arg \max_{i \in B \setminus x : x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A} [f(x) + \phi_i]$$

cioè quello di valore massimo: $i^* = \arg \max_{i \in B \setminus x : x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A} \phi_i$

Algorithm Greedy(I)

$x := \emptyset$;

While $\exists i \in B \setminus x : x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A$ *do*

$\quad i^* := \arg \max_{i \in B \setminus x : x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A} \phi_i$;

$\quad x := x \cup \{i^*\}$;

Return x; { La soluzione migliore visitata è l'ultima }

Il problema dello zaino unitario

Si vuole scegliere da un insieme di oggetti di pari volume un sottoinsieme di valore massimo che possa stare in uno zaino di capacità limitata

In questo caso speciale del *KP* il vincolo di volume diventa di cardinalità

$\mathcal{F}_A$ coincide con la regione ammissibile $X = \{x \subseteq B : |x| \leq \lfloor V/v \rfloor\}$

Algorithm GreedyUKP(I)

$x := \emptyset$;

While $|x| < \lfloor V/v \rfloor$ *do* $\quad\quad\quad$ { si pone $\mathcal{F}_A = X$ }

$\quad\quad i := \arg \max_{i \in B \setminus x} \phi_i$;

$\quad\quad x := x \cup \{i\}$;

Return x;

Lo pseudocodice è semplificato dal fatto che x è estendibile

- per ogni x di cardinalità $|x| < \lfloor V/v \rfloor$
- aggiungendo qualsiasi elemento $i \in B \setminus x$

Esempio: il problema dello zaino unitario

B	a	b	c	d	e	f
ϕ	7	2	4	5	4	1

$$v_i = 1 \text{ per ogni } i \in B$$

$$V = 4$$

L'algoritmo esegue i seguenti passi:

1. $x := \emptyset$;
2. poiché $|x| = 0 < 4$, valuta $i := a$ e aggiorna $x := \{a\}$;
3. poiché $|x| = 1 < 4$, valuta $i := d$ e aggiorna $x := \{a, d\}$;
4. poiché $|x| = 2 < 4$, valuta $i := c$ e aggiorna $x := \{a, c, d\}$;
5. poiché $|x| = 3 < 4$, valuta $i := e$ e aggiorna $x := \{a, c, d, e\}$;
6. poiché $|x| = 4 \not< 4$, termina

Questo algoritmo trova sempre la soluzione ottima

Ma perché?

Il problema dello zaino

Si vuole scegliere da un insieme di oggetti di vario volume un sottoinsieme di valore massimo che possa stare in uno zaino di capacità limitata

La differenza fondamentale è che si complica la definizione di $\mathcal{F}_A$ dato che non tutti gli elementi di $B \setminus x$ estendono x in modo ammissibile

$$x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A = X \Leftrightarrow \sum_{j \in x} v_j + v_i \leq V$$

Algorithm GreedyKP(I)

$x := \emptyset$;

While $\exists i \in B \setminus x : v_i \leq V - \sum_{j \in x} v_j$ *do*

$\quad i := \arg \max_{i \in B \setminus x : v_i \leq V - \sum_{j \in x} v_j} \phi_i$;

$\quad x := x \cup \{i\}$;

Return x;

Esempio: il problema dello zaino

B	a	b	c	d	e	f
ϕ	7	2	4	5	4	1
v	5	3	2	3	1	1

$$V = 8$$

L'algoritmo esegue i seguenti passi:

1. $x := \emptyset$;
2. poiché $v_i \leq V - \sum_{j \in x} v_j \ \forall i \in B \setminus x$, sceglie $i := a$ e aggiorna $x := \{a\}$;
3. poiché $v_i \leq V - \sum_{j \in x} v_j \ \forall i \in B \setminus x$, sceglie $i := d$ e aggiorna $x := \{a, d\}$;
4. poiché $v_i > V - \sum_{j \in x} v_j \ \forall i \in B \setminus x$, termina

Questo algoritmo non ha trovato la soluzione ottima $x^* = \{a, c, e\}$

Ma perché?

Correttezza dell'algoritmo greedy

Dato un problema di Ottimizzazione Combinatoria con

- insieme base B
- spazio di ricerca ("collezione di indipendenti") $\mathcal{F}_A \subseteq 2^B$

l'algoritmo greedy lo risolve per ogni funzione obiettivo additiva $f(x) = \sum_{i \in x} \phi_i$ se e solo se

1. il sottoinsieme vuoto è un indipendente: $\emptyset \in \mathcal{F}_A$
2. ogni sottoinsieme proprio di un indipendente è un indipendente: se $x \in \mathcal{F}_A$ e $y \subset x$ allora $y \in \mathcal{F}_A$
3. ogni indipendente si può allargare con un opportuno elemento di qualsiasi altro indipendente di cardinalità superiore: per ogni $x, y \in \mathcal{F}_A$ con $|x| = |y| + 1$, $\exists i \in x \setminus y : y \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A$

Queste condizioni

- valgono per il KP unitario
- non valgono per il KP generico

Algoritmi greedy euristici: il *KP*

Se lo spazio di ricerca $\mathcal{F}_A$ non ha le proprietà adatte, si può adottare

- una definizione sofisticata del criterio di scelta:

$$i = \arg \max_{i \in B \setminus x : x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A} \phi_i$$

diventa

$$i = \arg \max_{i \in B \setminus x : x \cup \{i\} \in \mathcal{F}_A} \varphi_A(i, x)$$

dove $\varphi_A(i, x)$ dipende sia dall'obiettivo sia dai vincoli del problema

Questo consente risultati efficaci, pur se non dimostrabilmente ottimi

Siccome l'algoritmo greedy base per il *KP* fallisce a causa del volume degli oggetti, si cercano oggetti di valore alto e volume basso

- anziché il valore ϕ_i, si usa il valore unitario $\varphi_A(i, x) = \frac{\phi_i}{v_i}$

L'algoritmo risultante tipicamente funziona molto meglio

Esempio: il *KP*

B	a	b	c	d	e	f
ϕ	7	2	4	5	4	1
v	5	3	2	3	1	1
ϕ/v	1.4	$0.\bar{6}$	2	$1.\bar{6}$	4	1

$$V = 8$$

L'algoritmo esegue i seguenti passi:

1. $x := \emptyset$;
2. sceglie $i := e$ e aggiorna $x := \{e\}$;
3. sceglie $i := c$ e aggiorna $x := \{c, e\}$;
4. sceglie $i := d$ e aggiorna $x := \{c, d, e\}$;
5. sceglie $i := f$ e aggiorna $x := \{c, d, e, f\}$; (*l'oggetto a non ci sta*)
6. poiché $v_i > V - \sum_{j \in x} v_j$ per ogni $i \in B \setminus x$, termina

La soluzione trovata vale 14, quella ottima è $x^* = \{a, c, e\}$ e vale 15

Istanze critiche del KP per l'algoritmo greedy

Nota: la parte che segue è fuori del programma del corso

Ci sono ancora casi critici

B	a	b
ϕ	10	90
v	1	10
ϕ/v	10	9

$$V = 10$$

L'algoritmo esegue i seguenti passi:

1. $x := \emptyset$;
2. sceglie $i := a$ e aggiorna $x := \{b\}$;
3. poiché $v_i > V - \sum_{j \in x} v_j$ per ogni $i \in B \setminus x$, termina

La soluzione vale 10, quella ottima vale 90

L'errore diventa grande a piacere quando
il primo oggetto scartato ha volume grande e valore grande

Un algoritmo 2-approssimato per il *KP*

Con una piccola modifica, l'algoritmo diventa $2-$ *approssimato*

Il suo risultato è almeno metà dell'ottimo

1. Si parte con un sottoinsieme vuoto: $x^{(0)} = \emptyset$
2. Si trova l'oggetto i di valore unitario massimo in $B \setminus x$
3. Se non eccede il volume, si mette in soluzione e si torna al punto 2
$$x^{(t-1)} = \{i_1, i_2, \dots, i_{t-1}\} \rightarrow x^{(t)} = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$$
4. Altrimenti, si costruisce una soluzione col solo oggetto
$$x' = \{i_t\}$$
5. Si restituisce la soluzione migliore fra x e x': $f_A = \max\left[f(x), f(x')\right]$

È facile dimostrare che

- la somma delle due soluzioni è una stima per eccesso dell'ottimo
$$f(x) + f(x') = \sum_{\tau=1}^{t} \phi_{i_\tau} \geq f^*$$
- la migliore delle due soluzioni è almeno metà della somma
$$f_A = \max\left[f(x), f(x')\right] \geq \frac{f(x) + f(x')}{2} \geq \frac{1}{2} f^*$$

Il problema dell'albero ricoprente minimo

Dati

- un grafo non orientato connesso $G = (V, E)$
  con $n = |V|$ vertici e $m = |E|$ lati
- una funzione di costo $c : E \to \mathbb{N}$ definita sui lati

si trovi un sottografo $T^* = (U^*, X^*)$

1. ricoprente: U^* contiene tutti i vertici ($U^* = V$)
2. connesso: X^* include un cammino fra ogni coppia di vertici u e v
3. aciclico: X^* non contiene cicli
4. di costo totale minimo:

$$c_{X^*} \leq c_X \text{ per ogni } T = (U, X) \text{ che soddisfa le proprietà 1, 2 e 3}$$

dove $c_X = \sum_{e \in X} c_e$

Algoritmo di Kruskal

Applichiamo l'algoritmo *greedy* usando come

- insieme base l'insieme dei lati del grafo ($B = E$)
- indipendenti le foreste ricoprenti il grafo

Quindi, l'algoritmo

1. parte con $X = \emptyset$
2. trova il lato di costo minimo $e^* = (u^*, v^*)$ non in X e non scartato
   - se $X \cup \{e^*\}$ non contiene cicli (cioè u^* e v^* non sono connessi in X) aggiunge e^* a X
   - se $X \cup \{e^*\}$ contiene cicli, scarta e^* permanentemente (ogni sottoinsieme più ampio conterrebbe cicli)

Kruskal(V, E, c)

$X := \emptyset$;

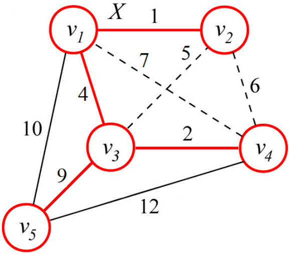
$E' := E$; { Lati non ancora scartati }

While $E' \neq \emptyset$

  $e^* := \arg\min_{e \in E'} c_e$;
  $E' := E' \setminus \{e^*\}$;
  If Aciclico$(X \cup \{e^*\})$ **then** $X := X \cup \{e^*\}$;

Return (V, X);

Esempio



Kruskal(V, E, c)

$X := \emptyset;$

$E' := E;$

While $E' \neq \emptyset$

$\quad e^* := \arg\min_{e \in E'} c_e$

$\quad E' := E' \setminus \{e^*\};$

$\quad$ **If** Aciclico$(X \cup \{e^*\})$

$\quad\quad$ **then** $X := X \cup \{e^*\};$

Return $(V, X);$

$e^* = (v_1, v_2)$

$e^* = (v_3, v_4)$

$e^* = (v_1, v_3)$

$e^* = (v_2, v_3)$ chiude un ciclo

$e^* = (v_2, v_4)$ chiude un ciclo

$e^* = (v_1, v_4)$ chiude un ciclo

$e^* = (v_3, v_5)$

Ogni albero ricoprente ha $n - 1$ lati: STOP

Complessità temporale

Gestire E' come *min-heap*

- costruirlo: $\Theta(m)$
- estrarre il minimo: $\Theta(1)$
- aggiornarlo: $\Theta(\log m)$

Gestire X come *foresta con bilanciamento*

- costruirla: $\Theta(n)$
- trovare le componenti di u^* e v^*: $\approx \Theta(1)$
- unire le componenti: $\Theta(1)$

Kruskal(V, E, c)

$X := \emptyset$;

$E' := E$;

While $|X| < |V| - 1$

$e^* := \arg\min_{e \in E'} c_e$

$E' := E' \setminus \{e^*\}$;

If Aciclico$(X \cup \{e^*\})$

then $X := X \cup \{e^*\}$;

Return (V, X);

Kruskal(V, E, c)

$X := \emptyset$;	$\Theta(1)$
$E' := E$;	$\Theta(1)$
$E' := \mathrm{CreaHeap}(E')$;	$\Theta(m)$
$F :=$ CostruisceForesta(X);	$\Theta(n)$
While $\|X\| < \|V\| - 1$	$i_{\max} \leq m$
$(u^*, v^*) := \mathrm{ArgMin}(E')$;	$\Theta(1)$
$E' := \mathrm{CancellaMinimo}(E')$;	$\Theta(\log n)$
If $\mathrm{Find}(u^*, F) \neq \mathrm{Find}(v^*, F)$	$\approx \Theta(1)$
then $X := X \cup \{(u^*, v^*)\}$;	$\Theta(1)$
Union(F_{u^*}, F_{v^*}, F);	$\Theta(1)$

Return (V, X);