Algoritmi (modulo di laboratorio)

Corso di Laurea in Matematica

Roberto Cordone

DI - Università degli Studi di Milano

Lezioni:	Martedì 8.30 - 10.30 in aula 8	Mercoledì 10.30 - 13.30 in aula 2
	Giovedì 15.30 - 18.30 in aula 2	Venerdì 10.30 - 12.30 in aula 3
Ricevimento:	su appuntamento (Dipartimento di Informatica)	
E-mail:	`roberto.cordone@unimi.it`	
Pagina web:	`http://homes.di.unimi.it/~cordone/courses/2023-algo/2023-algo.html`	
Sito Ariel:	`https://mgoldwurma.ariel.ctu.unimi.it`	

Lezione 14: Algoritmi di ordinamento “efficienti” Milano, A.A. 2022/23

Il problema dell'ordinamento

Sia U un insieme dotato di un ordine debole $\preceq$ *(sono ammessi i doppioni)*

Il problema dell'ordinamento ha come

- istanza: qualsiasi vettore V su U
- soluzione: il vettore V' permutazione di V tale che

$$V[i] \preceq V[j] \text{ per ogni } i \leq j$$

Esempio:

$V =$

5	2	8	4	7	1	3	6

$V' =$

1	2	3	4	5	6	7	8

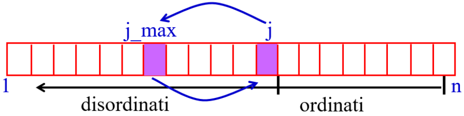
SelectionSort

L'algoritmo *SelectionSort* divide il vettore V in due tabelle:

- il sottovettore iniziale contiene gli elementi più piccoli disordinati
- il sottovettore finale contiene gli elementi più grandi ordinati

La seconda tabella è vuota all'inizio, poi cresce un elemento alla volta:

- l'elemento massimo della prima tabella si sposta nella seconda e diventa il suo primo elemento



SelectionSort: complessità

`SelectionSort(V,n)`	
`{`	
`  for (j = n; j > 1; j--)`	$\sum_{j=1}^{n} (\ldots)$
`  {`	
`    i = TrovaIndiceMassimo(V,j);`	$g(j)$
`    Scambia(&V[i],&V[j]);`	$\Theta(1)$
`  }`	
`}`	

`TrovaIndiceMassimo(V,n)`	$g(j) = \ldots$
`{`	
`  iMax = 1;`	$\Theta(1)$
`  for (i = 2; i <= n; i++)`	$\sum_{i=1}^{j} (\ldots)$
`    if (V[i] > V[iMax]) iMax = i;`	
`  return iMax;`	$\Theta(1)$
`}`	

SelectionSort è un algoritmo quadratico: $T(n) \in \Theta\left(n^2\right)$

Inefficienza di *SelectionSort*

La ricerca dell'elemento massimo rende *SelectionSort* inefficiente

Se richiedesse tempo costante, la complessità scenderebbe a $O(n)$

La struttura dati astratta *max-heap* consente di

- gestire un insieme (compresi inserimenti e cancellazioni)
- determinarne l'elemento massimo in tempo costante

Si può usarla per rappresentare la prima tabella, ma occorre

1. costruirla al principio quando coincide con l'intero vettore
2. mantenerla aggiornata quando perde l'elemento massimo

Queste operazioni sono però abbastanza efficienti

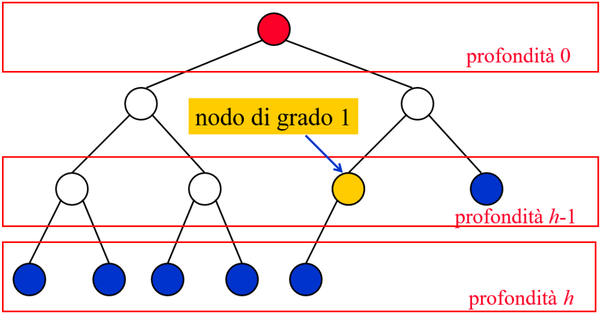
- aggiungere un elemento nuovo
- modificare un elemento
- cancellare un elemento (*ordinare richiede solo questa operazione*)

richiedono tempo logaritmico

La struttura *max-heap*

Un *max-heap* è caratterizzato da due proprietà:

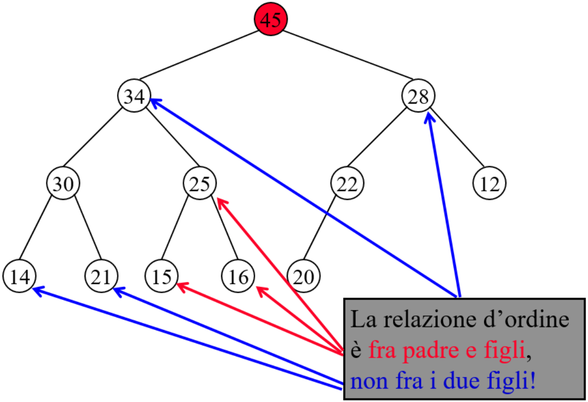
1. è un albero binario (*Lezione* 12) quasi completo, cioè con
   - foglie di profondità h o $h-1$
   - al più un nodo di grado 1
     - a profondità h
     - col solo figlio sinistro
     - con tutti i nodi alla sua destra nello stesso livello di grado nullo



La struttura *max-heap*

Un *max-heap* è caratterizzato da due proprietà:

2. i nodi sono etichettati con valori tratti da un insieme U ordinato e l'etichetta di ogni nodo non precede quelle degli eventuali nodi figli



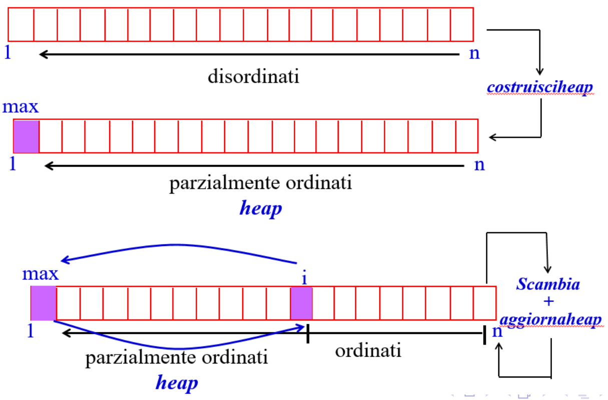
Heap e ordinamenti parziali

Un *heap* rappresenta un ordinamento parziale, cioè una relazione binaria

- riflessiva
- transitiva
- antisimmetrica

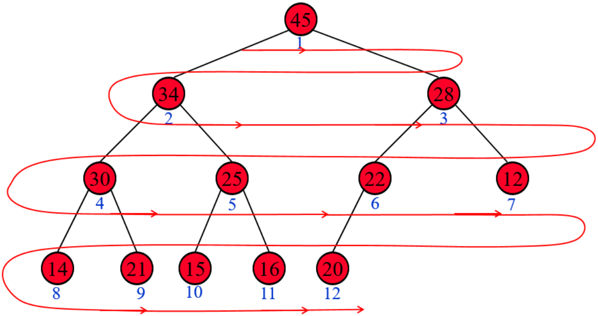
Questo suggerisce che possa essere utile per il problema dell'ordinamento

Manca solo la completezza!



Heap e tabelle

Un *heap* può facilmente essere rappresentato come una tabella



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	34	28	30	25	22	12	14	21	15	16	20

La quasi completezza consente di sostituire puntatori espliciti con operazioni aritmetiche sugli indici:

- il figlio sinistro di $V[i]$ sta in $V[2i]$
- il figlio destro di $V[i]$ sta in $V[2i+1]$
- il padre di $V[i]$ sta in $V[i/2]$

Le operazioni fondamentali sugli *heap* sono

- costruzione a partire da un semplice vettore non ordinato

$$\text{creaheap} : \mathcal{V}_{n,U} \to \mathcal{H}_{n,U}$$

- aggiornamento, cioè ripristino dell'etichettatura corretta in un nodo, assumendo che essa valga in ogni altro nodo

$$\text{aggiornaheap} : \mathcal{H}^{(1)}_{n,U} \times \mathbb{N}^+ \to \mathcal{H}_{n,U}$$

  intendendo con $\mathcal{H}^{(1)}_{n,U}$ l'insieme degli alberi binari quasi completi con al più una violazione sulle etichette (eventualmente, nessuna)

Aggiornamento

L'aggiornamento di un *heap* in un nodo dato consiste nel

- determinare il figlio con l'etichetta massima
- confrontare tale etichetta con quella del nodo dato: se superiore,
  - scambiare le due etichette
  - applicare ricorsivamente la procedura al nodo figlio

`aggiornaheap(V,n,i)`	$T(h)$
`{`	
`s := 2 * i; { figlio sinistro }`	$\Theta(1)$
`d := 2 * i + 1; { figlio destro }`	$\Theta(1)$
`iMax := i;`	$\Theta(1)$
`if (s <= n && A[s] > A[iMax]) iMax = s;`	$\Theta(1)$
`if (d <= n && A[d] > A[iMax]) iMax = d;`	$\Theta(1)$
`if (iMax != i)`	$\Theta(1)$
`{`	
`Scambia(&A[i],&A[iMax]);`	$\Theta(1)$
`aggiornaheap(V,n,iMax);`	$T(h-1)$
`}`	
`}`	Quindi complessità $\Theta(\log n)$

Costruzione

La costruzione di un *heap* su un vettore dato consiste nel

- aggiornare gli *heap* costituiti dai suoi sottoalberi
- in ordine inverso, perché l'aggiornamento presuppone la correttezza di tutti gli *heap* ai livelli inferiori (quindi con indici successivi)
- trascurando le foglie, perché sono certamente *heap* corretti

```
creaheap(V,n)
{
  for (i = n/2; i >= 1; i--)
    aggiornaheap(V,n,i);
}
```

Parte da $n/2$ anziché da n perché un nodo ha figli se e solo se $2i \leq n$ e i nodi senza figli certamente rispettano le proprietà

L'analisi di complessità (non elementare) mostra che $T(n) \in \Theta(n)$

HeapSort e *SelectionSort*

Si può quasi dire che sia lo stesso algoritmo con strutture dati diverse

```
SelectionSort(V,n)
{

  for (j = n; j > 1; j--)
  {
    i = TrovaIndiceMassimo(V,j);
    Scambia(&V[i],&V[j]);

  }
}
```

```
HeapSort(V,n)
{
  creaheap(V,n);
  for (j = n; j > 1; j--)
  {
    i = 1;
    Scambia(&V[i],&V[j]);
    aggiornaheap(V,j-1,1);
  }
}
```

così che la complessità temporale scende da $\Theta\left(n^2\right)$ a $\Theta\left(n \log n\right)$

Ordinamento per fusione (*MergeSort*)

Dato un vettore V, sia $V[s,d]$ il sottovettore contenente gli elementi di V con indici compresi fra s e d

L'algoritmo *MergeSort* applica la strategia detta *divide et impera*

- divide: suddivide il vettore in due sottovettori di $n/2$ elementi calcolando l'indice mediano (*è il modo più semplice, non l'unico!*)
- impera: ordina i sottovettori ricorsivamente, lasciando invariati quelli di lunghezza ≤ 1 (caso base)
- combina: fonde i due sottovettori producendone uno solo ordinato

MergeSort: pseudocodice

```
MergeSort(V,s,d)
{
  if (s < d)
  {
    m = ⌊(s+d)/2⌋;
    MergeSort(V,s,m);
    MergeSort(V,m+1,d);
    Merge(V,s,m,d);
  }
}
```

$$m = \left\lfloor \frac{s+d}{2} \right\rfloor;$$

I due sottovettori sono sempre più piccoli del vettore V grazie a

- l'arrotondamento per difetto
- la divisione in $V[s, m]$ e $V[m + 1, d]$

Senza questa combinazione la ricorsione proseguirebbe all'infinito (esaurendo lo *stack*)

(*per esempio, si consideri* $s = 5$ *e* $d = 6$)

MergeSort: correttezza

L'algoritmo funziona per induzione matematica (forte)

- nel caso base ($s \geq d$), il vettore V è ordinato
  Dunque l'algoritmo funziona su vettori di $n \leq 1$ elementi
- nel caso ricorsivo
  1. i due sottovettori sono strettamente più corti
     Dunque $n_1 < n$ e $n_2 < n$
  2. l'ipotesi induttiva garantisce che siano ordinati
     Se l'algoritmo ordina tutti i vettori di qualsiasi lunghezza $\ell < n \ldots$
  3. la funzione *Merge* garantisce che il risultato sia ordinato
     $\ldots$ l'algoritmo ordina anche qualsiasi vettore di lunghezza n

L'algoritmo ordina qualsiasi vettore V di qualsiasi lunghezza n

La procedura *Merge*

La procedura ricombina le soluzioni dei due sottoproblemi

Parte con le due metà del vettore V ordinate al proprio interno e un vettore ausiliario B vuoto:

1. finché i due sottovettori sono non vuoti
   - confronta i loro elementi minimi
   - sposta il minore dei due in fondo al vettore ausiliario B
2. quando uno dei due sottovettori è vuoto
   - copia l'altro in fondo al vettore ausiliario B
3. quando sono vuoti entrambi
   - ricopia il vettore ausiliario B sul vettore iniziale V

La complessità temporale è ovviamente lineare $\Theta(n)$

MergeSort: complessità

`MergeSort(V,s,d)`	
`{`	
`  if (s < d)`	$\Theta(1)$
`  {`	
$\quad m = \left\lfloor \frac{s+d}{2} \right\rfloor$;	$\Theta(1)$
`    MergeSort(V,s,m);`	$T_{MS}(n_1)$
`    MergeSort(V,m+1,d);`	$T_{MS}(n_2)$
`    Merge(V,s,m,d);`	$\Theta(n)$
`  }`	
`}`	

È facile mostrare che $n = d - s + 1 = n_1 + n_2$ con

$$n_1 = m - s + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \qquad n_2 = d - m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

MergeSort: complessità

Per semplicità consideriamo sequenze in cui n è una potenza di 2

- i due sottovettori hanno entrambi lunghezza $n/2$

Di conseguenza

- quando $n = 1$, il tempo di calcolo è $T(1) \in \Theta(1)$
- quando $n > 1$, il tempo di calcolo $T(n)$ è la somma di
  1. $\Theta(1)$ per il calcolo dell'indice mediano (divide)
  2. $2T(n/2)$ per la soluzione dei due sottoproblemi (impera)
  3. $\Theta(n)$ per la ricomposizione della soluzione (combina)

$$T_{MS}(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{per } n = 1 \\ 2T_{MS}(n/2) + \Theta(n) & \text{per } n > 1 \end{cases}$$

Si dimostra che $T_{MS}(n) \in \Theta(n \log n)$

Ordinamento “veloce” (*QuickSort*)

Dato un vettore V, sia $V[s, d]$ il sottovettore contenente gli elementi di V con indici compresi fra s e d

L'algoritmo *QuickSort* applica la strategia detta *divide et impera*

- divide: suddivide il vettore in due sottovettori
  (*in modo diverso da MergeSort!*)
- impera: ordina i sottovettori ricorsivamente,
  lasciando invariati quelli di lunghezza ≤ 1 (caso base)
- combina: fonde i due sottovettori producendone uno solo ordinato

La strategia è la stessa del *MergeSort*, ma i due sottovettori contengono

1. gli elementi non superiori a un valore di soglia
2. gli elementi superiori a un valore di soglia

Il valore soglia è il valore di un elemento specifico (elemento *pivot*), che viene estratto e poi reinserito in mezzo fra i due sottovettori ordinati

QuickSort: pseudocodice

La suddivisione diversa implica che:

1. la fase "divide" è più sofisticata:
   sposta gli elementi raccogliendone alcuni al principio e altri alla fine
2. la fase "combina" è banale:
   basta concatenare i due sottovettori ordinati

```
QuickSort(V,s,d)
{
  if (s < d)
  {
    q = Partition(V,s,d);        { q è la posizione finale del pivot }
    QuickSort(V,s,q-1);
    QuickSort(V,q+1,d);
  }
}
```

I due sottovettori sono più piccoli di V perché non contengono il *pivot*
(*questo evita la ricorsione infinita*)

QuickSort: correttezza

L'algoritmo funziona per induzione matematica (forte)

- nel caso base ($s \geq d$), il vettore V è ordinato
  Dunque l'algoritmo funziona su vettori di $n \leq 1$ elementi
- nel caso ricorsivo
  1. escludendo il *pivot*, i sottovettori sono strettamente più corti di V
     Dunque $n_1 < n$ e $n_2 < n$
  2. la funzione *Partition* garantisce che i valori del primo sottovettore siano non superiori al *pivot* e quelli del secondo superiori
  3. l'ipotesi induttiva garantisce che siano ordinati
     Se l'algoritmo ordina tutti i vettori di qualsiasi lunghezza $\ell < n$...
  4. il concatenamento crea banalmente un vettore ordinato
     ... l'algoritmo ordina anche qualsiasi vettore di lunghezza n

L'algoritmo ordina qualsiasi vettore

La procedura sceglie un elemento *pivot* che faccia da separatore e poi crea sul vettore V due sottovettori

- uno con gli elementi più piccoli del *pivot*
- uno con gli elementi più grandi del *pivot*

Ci sono molti modi di scegliere il pivot (per esempio $V[s]$)

Parte con due sottovettori vuoti all'inizio di V (elementi piccoli e grandi)
Considera ogni elemento di V e lo sposta nella tabella giusta

- se maggiore del *pivot*, allarga la seconda tabella a includerlo
- se minore del *pivot*
  1. scambia l'elemento col primo della seconda tabella e allarga quest'ultima
  2. allarga la prima tabella a includere l'elemento togliendolo alla seconda

La complessità temporale è ovviamente lineare $\Theta(n)$

Uno schema mnemonico

I diversi algoritmi visti sinora sono legati da alcune idee di fondo

1. il modo di procedere; ci sono algoritmi che
   a) costruiscono un sottovettore ordinato
   e lo ricombinano con gli elementi esterni, uno alla volta
   b) costruiscono due sottovettori, li ordinano e li ricombinano
2. la distribuzione dello sforzo; ci sono algoritmi che impiegano
   a) poco sforzo nella costruzione dei sottovettori ordinati e
   molto sforzo nella ricombinazione
   b) molto sforzo nella costruzione dei sottovettori ordinati e
   poco sforzo nella ricombinazione

	Costruzione banale e ricombinazione sofisticata	Costruzione sofisticata e ricombinazione banale
Allargamento di un sottovettore	InsertionSort	SelectionSort (HeapSort)
Fusione di due sottovettori	MergeSort	QuickSort

Implementazioni ricorsive di *InsertionSort* e *SelectionSort*

Vedi file `InsSort-SelSort-Ricorsive.pdf`