Algoritmi (modulo di laboratorio)

Corso di Laurea in Matematica

Roberto Cordone

DI - Università degli Studi di Milano

Lezioni:	Martedì 8.30 - 10.30 in aula 8	Mercoledì 10.30 - 13.30 in aula 2
	Giovedì 15.30 - 18.30 in aula 2	Venerdì 10.30 - 12.30 in aula 3
Ricevimento:	su appuntamento (Dipartimento di Informatica)	
E-mail:	roberto.cordone@unimi.it	
Pagina web:	http://homes.di.unimi.it/~cordone/courses/2023-algo/2023-algo.html	
Sito Ariel:	https://mgoldwurma.ariel.ctu.unimi.it	

Lezione 11: Visita di grafi e componenti connesse

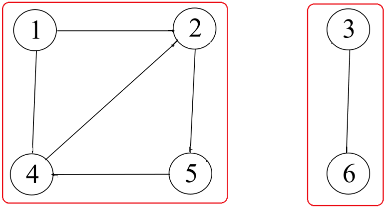
Milano, A.A. 2022/23

Componenti connesse di un grafo

Su un grafo non orientato $G = (V, E)$, la relazione di connessione è

- riflessiva (per convenzione)
- transitiva
- simmetrica

Quindi i vertici raggiungibili formano classi di equivalenza
che sono dette componenti connesse



Determinare le componenti connesse

Determinare le componenti connesse di un grafo è utile a individuare

- posizioni geografiche mutuamente raggiungibili
- stati di funzionamento di un sistema mutuamente trasformabili
- individui che possono comunicare fra loro
- blocchi di equazioni indipendenti tra loro
- ...

Insomma, è un sottoproblema abbastanza comune

Le principali difficoltà da affrontare nel risolvere questo problema sono

- la presenza di cammini alternativi fra gli stessi vertici
- l'esistenza di cicli, che tornano indietro a vertici già raggiunti
- l'esistenza di componenti separate, per cui non si può scorrere l'intero insieme dei vertici V passando attraverso i lati

Per le componenti fortemente connesse, c'è anche l'asimmetria degli archi

Componenti connesse e visita di un grafo

Assumiamo di aver un algoritmo di visita dal vertice sorgente s, cioè un algoritmo che enumera i vertici del grafo (V, E) raggiungibili da s

$$U_s \leftarrow \text{visita}\,(V, E, s) \qquad (\text{con } s \in U_s \subseteq V)$$

Per determinare le componenti connesse basta

1. definire un insieme dei vertici visitati, inizialmente vuoto
2. considerare un vertice v non visitato
   - visitare il grafo da v: U_v è una componente connessa, perché
     - sia C_v la componente connessa (unica) contenente v
     - $U_v \supseteq C_v$ perché i vertici di C_v sono raggiungibili da v
     - $U_v \subseteq C_v$ perché i vertici di U_v sono vicendevolmente raggiungibili passando per v e sfruttando la simmetria dei cammini
3. se esistono ancora vertici non visitati, tornare al punto 2

Al termine, i sottoinsiemi U_v ottenuti formano una partizione

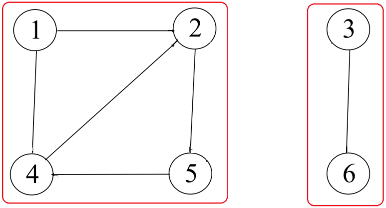
Come rappresentare i sottoinsiemi U_v?

Il vettore di marcatura C indica la componente cui appartiene ogni $v \in V$ (con un indice c intero progressivo, con l'indice s della sorgente, o altro)

- inserire un vertice in una componente richiede $\Theta(1)$
- cercare la componente cui appartiene un vertice richiede $\Theta(1)$

Altre operazioni sono meno efficienti, ma non sono richieste

Esempio



- tutti i vertici sono marcati come non assegnati: `C = [ 0 0 0 0 0 0 ]`
- si parte dalla sorgente $s = 1$
- la visita da $s = 1$ restituisce $U_1 = \{1, 2, 4, 5\}$: `C = [ 1 1 0 1 1 0 ]`
- si salta la sorgente $s = 2$, che è già marcata ($C_2 \neq 0$)
- la visita da $s = 3$ restituisce $U_3 = \{3, 6\}$: `C = [ 1 1 2 1 1 2 ]`
- si saltano le sorgenti $s = 4$, 5 e 6, che sono già marcate ($C_4 = C_5 = C_6 \neq 0$)

Componenti connesse di un grafo: pseudocodice

Qui adottiamo la marcatura con l'indice progressivo c

(*al termine, fornisce il numero di componenti connesse*)

```
ComponentiConnesse(V,E)
{
  for each s in V
    C[s] := 0;

  c := 0;
  for each s in V
  {
    if (C[s] = 0)
    {
      c := c+1;
      visita(V,E,s,C,c);
    }
  }
  return (C,c);
}
```

Visita di un grafo

L'idea fondamentale è di gestire due insiemi di vertici:

- l'insieme U dei vertici visitati (cioè raggiunti)
- l'insieme Q dei vertici visitati, ma non usati per visitarne altri (*ovviamente*, $Q \subseteq U \subseteq V$)

Ogni vertice deve essere visitato e usato una sola volta per visitarne altri
Usarli più volte è

- inutile, perché i vertici adiacenti rimangono gli stessi
- dannoso, perché si cicla indefinitamente sugli stessi vertici

Gli algoritmi di visita

- partono dalla sorgente: $U \leftarrow \{s\}$, $Q \leftarrow \{s\}$
- per ogni vertice $v \in Q$ visitato, ma non ancora usato
  - scorrono l'insieme `Adj(v)` dei vertici adiacenti a v
  - se un vertice adiacente w è non ancora visitato (test su U)
    - aggiungono w a U (*ora è visitato*)
    - aggiungono w a Q (*non è ancora stato usato per visitarne altri*)

Il grafo come vettore di *forward star* fornisce `Adj(v)` efficientemente

Visita di un grafo

Come rappresentare i due sottoinsiemi U e Q?

Al solito, dipende dalle operazioni richieste dall'algoritmo

L'insieme U dei vertici visitati richiede:

1. di aggiungere un elemento nuovo
2. di verificare l'appartenenza di un elemento dato

Con un vettore di incidenza entrambe le operazioni richiedono $\Theta(1)$

Per gestire diversi insiemi U, si può usare un vettore di marcatura C

L'insieme Q dei vertici visitati, ma non usati richiede:

1. di aggiungere un elemento nuovo
2. di estrarre un elemento qualsiasi

Con un vettore di incidenza, l'aggiunta richiede $\Theta(1)$, l'estrazione $\Theta(n)$!

Le liste consentono entrambe le operazioni in $\Theta(1)$
se si limitano l'aggiunta e l'estrazione alle posizioni estreme

Con questi vincoli, è possibile anche risparmiare spazio

Diverse strutture per Q danno luogo a diversi algoritmi di visita

Visita in ampiezza

La visita in ampiezza conserva i vertici visitati non usati in una coda Q

```
BFS(V,E,s,C,c)
{
  Q := ∅;
  C[s] := c;
  Enqueue(s,Q);
  while not IsEmpty(Q) do
  {
    v := Front(Q);
    Dequeue(Q);
    for each w in Adj(v) do
      if (C[w] = 0)
      {
        C[w] := c;
        Enqueue(w,Q);
      }
  }
}
```

Implementazione delle code come vettori

La coda è una lista con inserimento dal fondo ed estrazione dalla cima
Si parla di gestione *FIFO*, ovvero *First-In First-Out*
(il primo elemento inserito sarà il primo estratto)

Nel caso della visita di grafi, l'algoritmo ha tre proprietà molto utili

1. la coda non conterrà mai più di $n = |V|$ elementi:
   si può gestire la coda come un vettore `V`, senza puntatori
2. ogni elemento entra dalla coda ed esce dalla testa:
   si eseguono inserimenti e cancellazioni con due semplici indici interi:
   - `tail` è la posizione in cui va inserito il prossimo elemento
     (dunque, la prima posizione libera)
   - `head` è la posizione da cui si estrae il prossimo elemento
     (dunque, la prima posizione occupata)
3. ogni elemento estratto dalla coda non vi rientrerà mai più

Implementazione delle code come vettori

```
typedef struct _intqueue intqueue;
struct _intqueue
{
  int *V;
  int size; /* dimensione massima della coda */
  int head; /* indice dell'ultima posizione occupata */
  int tail; /* indice della prima posizione libera */
};
```

L'accesso in lettura al primo elemento è banale

```
Front(Q)
{
  Return Q.V[Q.head];
}
```

La coda è vuota quando la posizione in testa è la prima libera

```
IsEmpty(Q)
{
  Return (Q.tail == Q.head);
}
```

Implementazione delle code come vettori

L'inserimento usa la prima posizione libera, che scorre un passo in avanti

```
Enqueue(x,Q)
{
  Q.V[Q.tail] = x;
  Q.tail = (Q.tail+1) % Q.size;
}
```

Quando la coda eccede il vettore si usano le celle liberate in testa con l'aritmetica modulo `Q.size` (dimensione allocata)

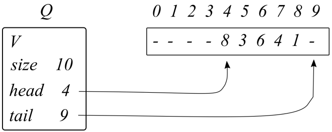
Lo spazio è esaurito quando `Q.head == Q.tail+1`

La cancellazione sposta un passo in avanti la prima posizione occupata

```
Dequeue(Q)
{
  Q.head = (Q.head+1) % Q.size;
}
```

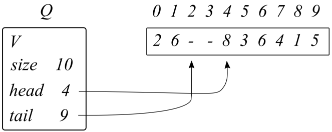
La visita in ampiezza non richiede l'uso dell'aritmetica modulare, perché ogni nodo entra nella coda al massimo una volta

Esempi

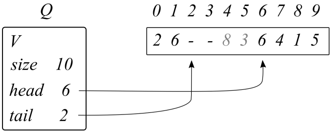


`Front(Q)` restituisce `Q.V[Q.head]`, cioè 8

`IsEmpty(Q)` restituisce `(Q.tail == Q.head)`, cioè *false*



Inserimento di tre elementi: `Enqueue(5,Q)`, `Enqueue(2,Q)`, `Enqueue(6,Q)`



Cancellazione di due elementi: `Dequeue(Q)`, `Dequeue(Q)`

Visita in profondità (versione iterativa)

La visita in profondità conserva i vertici visitati non usati in una pila S

```
DFS(V,E,s,C,c)
{
  S := ∅;
  C[s] := c;
  Push(s,S);
  while not IsEmpty(S) do
  {
    v := Top(S);
    Pop(S);
    for each w in Adj(v) do
      if (C[w] = 0)
      {
        C[w] := c;
        Push(w,S);
      }
  }
}
```

```
BFS(V,E,s,C,c)
{
  Q := ∅;
  C[s] := c;
  Enqueue(s,Q);
  while not IsEmpty(Q) do
  {
    v := Front(Q);
    Dequeue(Q);
    for each w in Adj(v) do
      if (C[w] = 0)
      {
        C[w] := c;
        Enqueue(w,Q);
      }
  }
}
```

Implementazione delle pile come vettori

La pila è una lista con inserimento ed estrazione dalla testa
Si parla di gestione *LIFO*, ovvero *Last-In First-Out*
(l'ultimo elemento inserito è il primo estratto)

L'algoritmo ha le stesse tre proprietà molto utili della *BFS*:

1. la pila non conterrà mai più di $n = |N|$ elementi:
   si può gestire la pila come un vettore `V`, senza puntatori
2. ogni elemento entra ed esce dalla cima:
   si eseguono inserimenti e cancellazioni con un semplice indice intero:
   - `top` è la posizione in cui è stato inserito l'ultimo elemento
     (dunque, l'ultima posizione occupata)
3. ogni elemento estratto dalla pila non vi rientrerà mai più

Implementazione delle pile come vettori

```
typedef struct _intstack intstack;
struct _intstack
{
  int *V;
  int size; /* dimensione massima della pila */
  int top; /* indice dell'ultima posizione occupata */
};
```

L'accesso in lettura al primo elemento è banale

```
Top(S)
{
  Return S.V[S.top];
}
```

La pila è vuota quando la posizione in cima è fuori del vettore

```
IsEmpty(Q)
{
  Return (S.top == -1);
}
```

Implementazione delle pile come vettori

L'inserimento usa la posizione dopo la cima, che scorre un passo avanti

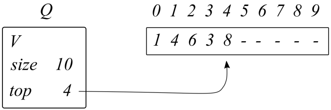
```
Push(x,S)
{
  S.top = S.top+1;
  S.V[S.top] = x;
}
```

Lo spazio è esaurito quando `S.top == S.size`

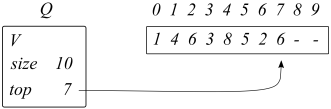
La cancellazione sposta un passo indietro l'ultima posizione occupata

```
Pop(S)
{
  S.top = S.top-1;
}
```

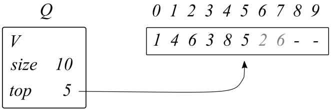
La gestione della pila non richiede l'uso dell'aritmetica modulare,
perché inserimenti ed estrazioni avvengono dalla stessa parte del vettore



`Top(S)` restituisce `S.V[S.top]`, cioè 8
`IsEmpty(S)` restituisce `(S.top == -1)`, cioè *false*



Inserimento di tre elementi: `Push(5,S)`, `Push(2,S)`, `Push(6,S)`



Cancellazione di due elementi: `Pop(S)`, `Pop(S)`

Visita in profondità (versione ricorsiva)

Esiste una versione ricorsiva della visita in profondità
che usa la pila di sistema anziché una pila esplicita

```
DFS(V,E,s,C,c)
{

  C[s] := c;






  for each w in Adj(s) do
    if (C[w] = 0)
    {

      DFS(V,E,w,C,c);
    }
}
```

```
DFS(V,E,s,C,c)
{
  S := ∅;
  C[s] := c;
  Push(s,S);
  while not IsEmpty(S) do
  {
    v := Top(S);
    Pop(S);
    for each w in Adj(v) do
      if (C[w] = 0)
      {
        C[w] := c;
        Push(w,S);
      }
  }
}
```

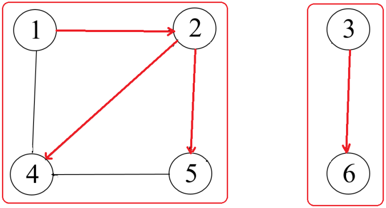
È equivalente alla precedente purché si scorra Adj(v) in ordine inverso

È molto più semplice ed elegante, ma un po' meno efficiente

Alberi di visita

La soluzione è descritta dal vettore di marcatura C, ma è anche possibile annotare per ogni vertice il lato che lo raggiunge e avere l'albero di visita

- sottografo del grafo di partenza $G = (V, E)$
- orientato in base all'ordine di visita
- rappresentabile con un vettore f che indica per ogni vertice v il vertice f_v da cui si è raggiunto v (vertice padre)



$$f = [\quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad]$$

Se vi sono più componenti connesse, è una foresta (un albero ciascuna)

Nelle dispense l'albero è descritto dalla lista dei lati, nei codici non è descritto

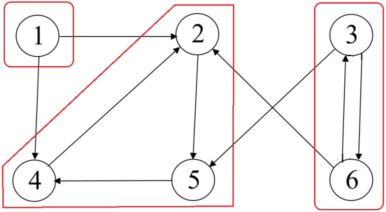
Componenti fortemente connesse di un grafo

Su un grafo orientato $G = (N, A)$, la relazione di connessione è

- riflessiva (per convenzione)
- transitiva
- in generale non simmetrica

La relazione di connessione forte è anche simmetrica (vale nei due versi)

I vertici reciprocamente raggiungibili formano classi di equivalenza
che sono dette componenti fortemente connesse



Componenti fortemente connesse e visita di un grafo

Definiamo nodi co-raggiungibili da v i nodi da cui v è raggiungibile

La componente fortemente connessa che contiene v è l'intersezione fra nodi raggiungibili e nodi co-raggiungibili da v:

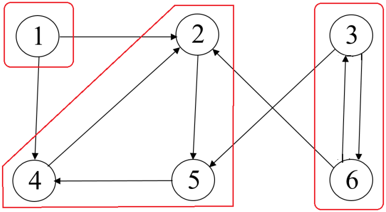
- tutti i nodi della componente son raggiungibili e co-raggiungibili da v
- tutti i nodi raggiungibili e co-raggiungibili da v sono reciprocamente raggiungibili passando per v, e quindi appartengono alla componente

In un grafo orientato, la visita determina solo i nodi raggiungibili da v, ma invertendo il verso degli archi, la visita determina i nodi co-raggiungibili

Quindi, per determinare le componenti fortemente connesse basta scorrere i nodi come visto prima e per ciascun nodo v

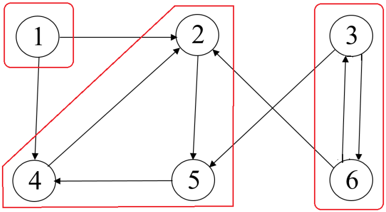
- visitare il grafo da v
- visitare il grafo trasposto da v (nodi identici e archi invertiti)
  (*se c'è la backward star, basta un solo grafo*)
- calcolare l'intersezione dei due sottoinsiemi di nodi visitati

Esempio



- tutti i vertici sono marcati come non assegnati: `C = [0 0 0 0 0 0]`
- si parte dalla sorgente $s = 1$
- la visita diretta da $v = 1$ restituisce $U_1^+ = \{1, 2, 4, 5\}$: `C1 = [1 1 0 1 1 0]`
- la visita inversa da $v = 1$ restituisce $U_1^- = \{1\}$: `C2 = [1 0 0 0 0 0]`
- l'intersezione è $U_1 = \{1\}$: `C = [1 0 0 0 0 0]`

Esempio



- la visita diretta da $v = 2$ restituisce $U_2^+ = \{2, 4, 5\}$: `C1 = [0 2 0 2 2 0]`
- la visita inversa da $v = 2$ restituisce $U_2^- = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: `C2 = [2 2 2 2 2 2]`
- l'intersezione è $U_2 = \{2, 4, 5\}$: `C = [1 2 0 2 2 0]`
- la visita diretta da $v = 3$ restituisce $U_3^+ = \{2, 3, 4, 5, 6\}$: `C1 = [0 3 3 3 3 3]`
- la visita inversa da $v = 3$ restituisce $U_3^- = \{3, 6\}$: `C2 = [0 0 3 0 0 3]`
- l'intersezione è il sottoinsieme $U_3 = \{3, 6\}$: `C = [1 2 3 2 2 3]`
- le sorgenti 4, 5 e 6 sono già marcate