Esercizi sulle sommatorie asintotiche

Roberto Cordone

Data un'istanza di dimensione n, un algoritmo iterativo si compone di

1. un passo iniziale, di complessità $T_{in}(n)$;
2. un passo iterativo ripetuto più volte (al massimo $i_{\max}$ volte, la cui complessità $T^{(i)}(n)$ dipende in genere da n, ma anche dall'iterazione i-esima;
3. un passo finale, di complessità $T_{fin}(n)$, che negli algoritmi più semplici spesso manca.

La sua complessità totale è quindi pari a

$$F(n) = T_{in}(n) + \sum_{i=1}^{i_{\max}} T^{(i)}(n) + T_{fin}(n)$$

e per valutarla occorre conoscere $T_{in}(n)$, $i_{\max}$, $T^{(i)}(n)$ e $T_{fin}(n)$ e saper calcolare la sommatoria. Nel seguito, per semplicità e per assumere una notazione più matematica e meno legata all'applicazione algoritmica, indicheremo $T^{(i)}(n)$ con $f(i)$, $i_{\max}$ con n e $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ con $F(n)$. Inoltre, considereremo sommatorie estese da 0, 1 o 2 a n a seconda della funzione che viene sommata. Dato che ci interessa l'andamento asintotico della soluzione, il valore costante dal quale parte la sommatoria non influisce sul risultato.

Le funzioni $f(i)$ che occorre sommare studiando la complessità di un algoritmo sono tutte non negative. Da ciò derivano le seguenti banali approssimazioni per difetto e per eccesso:

- $\sum_{i=0}^{n} f(i) \geq n \cdot \min_{i=0,\ldots,n} f(n)$
- $\sum_{i=0}^{n} f(i) \geq \max_{i=0,\ldots,n} f(n)$
- $\sum_{i=0}^{n} f(i) \leq n \cdot \max_{i=0,\ldots,n} f(n)$

Inoltre, la stragrande maggioranza di tali funzioni è monotona, spesso crescente, talvolta decrescente. Quindi assume il valore minimo e massimo per $i = 0$ e in $i = n$. Se ne deduce che per le funzioni $f(i)$ crescenti

$$f(i) \in \Omega(n) \qquad f(i) \in \Omega(f(n)) \qquad f(i) \in O(n\, f(n))$$

e per le funzioni $f(i)$ decrescenti

$$f(i) \in \Omega(1) \qquad f(i) \in \Omega(n\, f(n)) \qquad f(i) \in O(n)$$

Ora si tratta di determinare un andamento più preciso, cioè possibilmente la classe Θ di appartenenza della funzione. Una buona regola empirica è la seguente:

1. per le funzioni esponenziali crescenti $F(n) \in \Theta(f(n))$
2. per le funzioni polinomiali e logaritmiche crescenti $F(n) \in \Theta(n\, f(n))$
3. per le funzioni decrescenti più lentamente di $1/n$, $F(n) \in \Theta(n\, f(n))$
4. per le funzioni decrescenti più rapidamente di $1/n$, $F(n) \in \Theta(1)$

Questa regola suggerisce che cosa convenga cercare di dimostrare. Se vogliamo però essere certi del risultato, occorre dimostrarlo.

Non tutte le funzioni cadono nelle quattro categorie su elencate. Un esempio notissimo è la somma armonica

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \in \Theta(\log n)$$

Altri esempi sono le funzioni che decrescono più rapidamente o più lentamente di $1/i$, ma non in modo polinomialmente più rapido o più lento (vedi l'ultimo esempio).

Esempio 1

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} 2^i i \log i$$

La presenza dell'esponenziale fa intuire che $F(n) \in \Theta(f(n))$. Che sia $F(n) \in \Omega(f(n))$ è ovvio grazie alla stima per difetto banale; rimane da dimostrare la stima per eccesso.

È sufficiente osservare che $i \log i \leq n \log n$ per ogni $i \leq n$:

$$F(n) \leq \sum_{i=0}^{n} 2^i n \log n = n \log n \sum_{i=0}^{n} 2^i = \left(2^{n+1} - 1\right) n \log n$$

e trascurando i termini dominati e la costante moltiplicativa 2:

$$F(n) = \Theta(2^n n \log n)$$

Esempio 2

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n} f(i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{3^i}{i \log i}$$

La funzione è rapidamente crescente, a causa del termine esponenziale. Quindi, cercheremo sempre di dimostrare una stima per eccesso in $O(f(n))$. Tuttavia, questa volta il termine moltiplicativo polinomale è decrescente; la maggiorazione è leggermente più complicata e richiede una decomposizione.

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n/2-1} \frac{3^i}{i \log i} + \sum_{i=n/2}^{n} \frac{3^i}{i \log i}$$

In ciascuna somma, sostituiamo il generico termine polinomiale e logaritmico con il primo:

$$F(n) < \sum_{i=2}^{n/2-1} \frac{3^i}{2 \log 2} + \sum_{i=n/2}^{n} \frac{3^i}{\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n/2-1} 3^i + \frac{1}{\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}} \sum_{i=n/2}^{n} 3^i$$

La prima somma è in $\Theta\left(3^{n/2}\right)$, mentre la seconda si può maggiorare estendendo la somma, che attualmente è da $n/2$ a n, nuovamente da 1 a n: tale maggiorazione si può valutare in forma chiusa con la somma geometrica, ottenendo in complesso un termine in $\Theta(3^n/n \log n)$. Siccome il primo termine è dominato dal secondo, e tenendo conto della somma per difetto banale, si ottiene:

$$F(n) \in \Theta\left(\frac{3^n}{n \log n}\right)$$

Esempio 3

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n} f(i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{\log i}$$

Essendo una funzione crescente polinomiale, cerchiamo di dimostrare che la somma sia in $\Theta(n\, f(n))$, e in particolare che sia in $\Omega(n\, f(n))$, dato che la stima per eccesso è banale.

Applichiamo la decomposizione in due sommatorie parziali:

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n/2-1} \frac{i}{\log i} + \sum_{i=n/2}^{n} \frac{i}{\log i} > \frac{n}{2} \frac{n/2}{\log(n/2)}$$

Possiamo maggiorare questo valore sostituendo al denominatore $\log(n/2)$ un valore più grande, cioè $\log n$:

$$F(n) > \frac{n}{2}\frac{n}{2\log n} = \frac{1}{4}\frac{n^2}{\log n}$$

da cui la tesi

$$F(n) \in \Theta\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$$

Esempio 4

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \sqrt[3]{i}$$

Trattandosi di un polinomio, è facile intuire che cresca lentamente. Applichiamo ancora la decomposizione in due sommatorie parziali:

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n/2-1} \sqrt[3]{i} + \sum_{i=n/2}^{n} \sqrt[3]{i} > \frac{n}{2}\sqrt[3]{n/2}$$

da cui, tenendo conto della stima per eccesso banale

$$F(n) \in \Theta\left(n\sqrt[3]{n}\right)$$

In questo esempio sarebbe abbastanza semplice valutare la somma approssimata con l'integrale:

$$\sqrt[3]{0} + \int_0^n \sqrt[3]{x}dx \leq F(n) \leq \int_0^n \sqrt[3]{x}dx + \sqrt[3]{n}$$

e siccome l'integrale vale

$$\int_0^n \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}\left(n^{4/3} - 0^{4/3}\right) = \frac{3}{4}n^{4/3}$$

si deduce che

$$\frac{3}{4}n^{4/3} \leq F(n) \leq \frac{3}{4}n^{4/3} + \sqrt[3]{n}$$

confermando la tesi.

Esempio 5

$$F\left(n\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{i^{2}}}$$

Questa volta, ci troviamo di fronte a una funzione che decresce più lentamente di $1/i$. Infatti

$$f\left(i\right)=i^{-2/3}=\frac{i^{1/3}}{i}$$

Si può approssimare la sommatoria con l'integrale.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\int_{1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx\leq F\left(n\right)\leq\int_{1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx+\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}$$

e siccome l'integrale vale

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx=3\left(n^{1/3}-1^{1/3}\right)=3n^{1/3}-3$$

si deduce che

$$3\sqrt[3]{n}-2\leq F\left(n\right)\leq3\sqrt[3]{n}-3+\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}$$

che conferma la stima

$$F\left(n\right)\in\Theta\left(\sqrt[3]{n}\right)$$

Esempio 6

$$F\left(n\right)=\sum_{i=2}^{n}f\left(i\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i^{2}\log i}$$

Questa funzione cala più rapidamente di $1/i$, per cui cercheremo di dimostrare che abbia somma asintoticamente costante. Per farlo, basta maggiorare il termine generico con $1/i^2$

$$F\left(n\right)=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^{2}\log i}<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^{2}}$$

ottenendo una maggiorazione che già di per sé garantisce il risultato desiderato con il metodo dell'integrale:

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^{2}}\leq\int_{2}^{n}\frac{1}{x^{2}}dx+\frac{1}{n^{2}}=-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n^{2}}<\frac{1}{2}$$

da cui, tenendo conto anche della somma per difetto banale:

$$F(n) \in \Theta(1)$$

Esempio 7

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{i}$$

Questa è una somma geometrica, il cui valore è noto in forma chiusa.

$$F(n) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \in \Theta(1)$$

Esempio 8

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n} f(i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i \log i}$$

Questa funzione cala più rapidamente di $1/i$, ma meno rapidamente di qualsiasi potenza $i^{-1-\epsilon}$. Quindi non ricade in nessuna delle categorie su elencate. Si può procedere per integrazione:

$$\frac{1}{2\log 2} + \int_{2}^{n} \frac{1}{x\log x} dx \leq \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\log i} \leq \frac{1}{n\log n} + \int_{2}^{n} \frac{1}{x\log x} dx$$

Poniamo $y = \log x = \ln x/\ln 2$, da cui $dy = dx/(x\ln 2)$

$$\int_{2}^{n} \frac{1}{x\log x} dx = \int_{1}^{\log n} \frac{\ln 2}{y} dy = \ln 2 \int_{1}^{\log n} d\ln y = \ln 2\,(\ln\log n - \ln\log 1)$$

da cui

$$F(n) \in \Theta(\log\log n)$$