Esercizi sulla complessità asintotica

Roberto Cordone

17 settembre 2010

Principi generali

Le dimostrazioni di complessità asintotica si possono paragonare a un gioco, nel quale

- il primo giocatore decide i valori di tre "carte" c_1, c_2 e n_0 che sono numeri fissati una volta per tutte;
- il secondo giocatore decide il valore di una "carta" n, che è funzione dei primi tre, dato che viene scelto dopo.

Consideriamo l'appartenenza a Θ, che è il caso più complesso. Vince il primo giocatore se riesce a

- giocare le tre carte $c_1 = \bar{c}_1$, $c_2 = \bar{c}_2$ e $n_0 = \bar{n}_0$
- costruire una catena di implicazioni

$$\begin{cases} c_1 = \bar{c}_1 \\ c_2 = \bar{c}_2 \\ n_0 = \bar{n}_0 \\ n \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \bar{c}_1 g(n) \leq f(n) \leq \bar{c}_2 g(n)$$

Vince il secondo giocatore se riesce a

- giocare la carta n
- costruire una catena di implicazioni

$$n = \bar{n}(c_1, c_2, n_0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} n \geq n_0 \\ \text{\textit{e}} \\ \begin{cases} f(n) < c_1 g(n) \\ \text{oppure} \\ f(n) > c_2 g(n) \end{cases} \end{cases}$$

Si notino gli *e* e *oppure*. La seconda e terza tesi sono in alternativa: bisogna sceglierne una. La prima tesi, invece, va congiunta con una delle altre due. Per farlo, è sufficiente fissare n come massimo fra n_0 e un valore che dimostri una delle altre due condizioni.

Esercizio 1

Dimostrare che

$$f(n) = 5n^2 + n \in O\left(n^2\right)$$

Svolgimento Occorre dimostrare che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : \ 5n^2 + n \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$$

In altre parole, le nostre ipotesi sono:

1. che n_0 abbia un valore scelto da noi a piacere
2. che c abbia un valore scelto da noi a piacere
3. che sia $n \geq n_0$

e la tesi cui dobbiamo arrivare è che $f(n) = 5n^2 + n \leq cn^2$.

Si procede "indovinando" il valore di c e n_0 per tentativi basati sull'esperienza. Per aiutarsi a indovinare, si può *sostituire la tesi con un'espressione equivalente o anche più forte*, ma più semplice.

Vediamo una sostituzione con un'espressione equivalente:

$$5n^2 + n \leq cn^2 \Leftrightarrow (c-5)\,n^2 \geq n$$

ed essendo $n \geq 0$

$$(c-5)\,n^2 \geq n \Leftrightarrow (c-5)\,n \geq 1$$

Ora la tesi da dimostrare è molto più semplice. Se poniamo $c = 6$, diventa

$$(c-5)\,n \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

e dimostrarla è banale, perché l'ipotesi garantisce $n \geq n_0$ e possiamo fissare n_0 a piacere (per esempio, $n_0 = 1$).

Riassumendo:

$$\begin{cases} c = 6 \\ n_0 = 1 \\ n \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow (c-5)\,n \geq 1 \Rightarrow (c-5)\,n^2 \geq n \Rightarrow 5n^2 + n = f(n) \leq cn^2$$

L'esperienza aiuta facendo osservare che $f(n) = 5n^2 + n$ è un polinomio, e quindi il suo comportamento è dominato dal termine di grado massimo $5n^2$. Per approssimarla asintoticamente per eccesso, basta considerare una potenza di pari grado (secondo grado), ma con un coefficiente maggiore (un generico $5 + \epsilon$ va bene, ma probabilmente 6 produce calcoli più semplici). Se fosse necessaria un'approssimazione per difetto (ad esempio, dovendo dimostrare un'appartenenza a Ω), basterebbe una potenza di pari grado (secondo), ma con un coefficiente minore (ad esempio, 4).

Esercizio 2

Dimostrare che

$$f(n) = 5n^2 + n \in \Omega\left(n^2\right)$$

Svolgimento Occorre dimostrare che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : \; 5n^2 + n \geq cn^2 \; \forall n \geq n_0$$

Le ipotesi sono che n_0 e c abbiano valori scelti a piacere e che $n \geq n_0$ e la tesi che $f(n) = 5n^2 + n \geq cn^2$.

Sostituiamo la tesi con un'espressione più semplice, ma più forte:

$$\phi(n) = 5n^2 \geq cn^2$$

Se dimostriamo questa, infatti, automaticamente dimostriamo la prima, perché $f(n) \geq \phi(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi la nuova tesi viene sottoposta a qualche passaggio semplificativo:

$$5n^2 \geq cn^2 \Leftrightarrow 5 \geq c$$

Dimostrarla è banale: basta porre $c = 5$. Questa volta, non è neppure necessario scegliere un valore per n_0.

Riassumendo:

$$\begin{cases} c = 5 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow 5n^2 \geq cn^2 \Rightarrow f(n) = 5n^2 + n \geq 5n^2 \geq cn^2$$

Esercizio 3

Dimostrare che

$$f\left(n\right) = 3n^4 \in O\left(n^5\right)$$

Svolgimento Occorre dimostrare che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ :\ 3n^4 \leq cn^5\ \forall n \geq n_0$$

Le ipotesi sono che n_0 e c abbiano un valore scelto da noi a piacere e che $n \geq n_0$. La tesi da dimostrare è che $3n^4 \leq cn^5$.

Supponiamo di avere un po' di intuizione e di "vedere" che un buon valore per c è 3 (in realtà, essendo una potenza di ordine superiore, qualsiasi valore positivo, anche piccolissimo, andrebbe bene, ma con $c = 3$ tutto diventa semplice). Posto $c = 3$, la tesi da dimostrare si semplifica

$$3n^4 \leq cn^5 \Leftrightarrow 3n^4 \leq 3n^5$$

e ancora, essendo $n \geq 0$

$$3n^4 \leq 3n^5 \Leftrightarrow 1 \leq n$$

Ora, poiché sappiamo per ipotesi che $n \geq n_0$ e possiamo fissare n_0 a piacere, il modo migliore di dimostrare la tesi è porre $n_0 = 1$

Riassumendo:

$$\begin{cases} c = 3 \\ n_0 = 1 \\ n \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 3n^5 \geq 3n^4 \end{cases} \Rightarrow 3n^4 = f\left(n\right) \leq cn^5$$

Esercizio 4

Dimostrare che

$$f(n) = n^2 \in \Omega\left(n^2 + 5n - 6\right)$$

Svolgimento Occorre dimostrare che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ :\ n^2 \geq c\left(n^2 + 5n - 6\right)\ \forall n \geq n_0$$

Le ipotesi sono che n_0 e c abbiano un valore scelto da noi a piacere e che $n \geq n_0$. La tesi da dimostrare è che $n^2 \geq c\left(n^2 + 5n - 6\right)$.

L'esperienza e l'intuizione suggeriscono che occorre tenere il termine di grado massimo sulla destra più basso di quello sulla sinistra, ovvero $c < 1$. Per semplicità, proviamo con $c = 1/2$. La tesi da dimostrare diventa

$$n^2 \geq c\left(n^2 + 5n - 6\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3 \geq 0 \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 \geq 0$$

La disequazione si risolve facilmente

$$n^2 - 5n + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 2 \\ \textit{oppure} \\ n \geq 3 \end{cases}$$

Si noti l'*oppure*: le due condizioni non devono valere entrambe (anche perché sono contraddittorie): una basta a implicare la tesi. La prima è impossibile da dimostrare, perché *non scegliamo noi* n. Possiamo però fissare $n_0 = 3$, e quindi imporre $n \geq n_0 = 3$.

Riassumendo:

$$\begin{cases} c = 1/2 \\ n_0 = 3 \\ n \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1/2 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1/2 \\ n^2 - 5n + 6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1/2 \\ n^2 \geq \frac{1}{2}\left(n^2 + 5n - 6\right) \end{cases} \Rightarrow f(n) \geq c\left(n^2 + 5n - 6\right)$$

Esercizio 5

Dimostrare che

$$f(n) = n^2 \in O\left(\frac{n^2}{4} - 2\right)$$

Svolgimento

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ :\ n^2 \leq c\left(\frac{n^2}{4} - 2\right)\ \forall n \geq n_0$$

Le ipotesi sono che n_0 e c abbiano un valore scelto da noi a piacere e che $n \geq n_0$. La tesi da dimostrare è che $n^2 \leq c\left(n^2/4 - 2\right)$.

Qualsiasi valore di $c > 4$ va bene. Per semplificare i conti, poniamo $c = 8$. La tesi diventa

$$n^2 \leq c\left(n^2/4 - 2\right) \Leftrightarrow n^2 \leq 2n^2 - 16 \Leftrightarrow n^2 \geq 16 \Leftrightarrow n \leq -4 \text{ oppure } n \geq 4$$

Ovviamente, la prima condizione non è dimostrabile, mentre la seconda lo è facilmente, ponendo $n_0 = 4$.

Esercizio 6

Dimostrare che[1]

$$f(n) = n \log_2 n \in O\left(n^2\right)$$

Svolgimento

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : \; n \log_2 n \leq cn^2 \; \forall n \geq n_0$$

Qui è più complicato semplificare la tesi, perché logaritmi e polinomi non si combinano. Si può però osservare che

$$n \log_2 n \leq cn^2 \Leftrightarrow \log_2 n \leq cn$$

L'esperienza insegna che le funzioni logaritmiche crescono sempre meno fortemente dei polinomi, per cui qualsiasi valore di c sarebbe accettabile. Per semplicità poniamo $c = 1$, cosicché la tesi diventa

$$\phi(n) = n - \log_2 n \geq 0$$

Scegliamo un valore comodo per n_0 e poi dimostriamo la tesi per ogni $n \geq n_0$. Ad esempio, poniamo $n_0 = 2$. Qualora il tentativo fallisca, proveremo con un valore più alto.

Per dimostrare la tesi, ne dimostriamo una più forte, cioè che $\phi(x) = x - \log_2 x \geq 0$ per tutti i valori *reali* $x \geq 2$.

Per mostrare che una funzione è ≥ 0 da un certo punto in poi, basta mostrare

1. che in quel punto è ≥ 0;
2. che successivamente cresce, cioè ha *derivata strettamente positiva*.

$$\begin{cases} \phi(n_0) \geq 0 \\ \phi'(x) > 0 \; \forall x \geq n_0 \end{cases}$$

Procediamo:

$$\phi(2) = 2 - \log_2 2 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$\phi'(c) = 1 - 1/x \geq 0 \text{ per ogni } x \geq 1$$

[1] Si può interpretare questo esercizio come la dimostrazione del fatto che l'algoritmo *InsertionSort* è asintoticamente peggiore dell'algoritmo *MergeSort*.

Riassumendo

$$\begin{cases} c = 1 \\ n_0 = 2 \\ n \geq n_0 \\ \phi(2) > 0 \\ \phi'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ n \geq 2 \\ \phi(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ \phi(n) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ n - \log n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow cn \geq \log_2 n \Rightarrow n \log_2 n \leq cn^2$$

Esercizio 7

Dimostrare che

$$f(n) = n^2 \in O(2^n)$$

Svolgimento

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : \ n^2 \leq c\, 2^n \ \forall n \geq n_0$$

Anche qui è impossibile semplificare la tesi, perché esponenziali e polinomi non si combinano. L'esperienza insegna che le funzioni esponenziali crescono sempre più fortemente dei polinomi, per cui qualsiasi valore di c sarebbe accettabile. Per semplicità poniamo $c = 1$ e rafforziamo la tesi passando ai numeri reali:

$$\phi(x) = 2^x - x^2 \geq 0$$

Per tentativi, ci si rende facilmente conto che questa tesi vale per $x = 1$ e $x = 2$, ma non per $x = 3$, e torna a valere per $x = 4$. Siccome 4 è una potenza di 2 e semplifica i calcoli, poniamo $n_0 = 4$.

Per dimostrare la tesi, mostriamo che $\phi(4) > 0$ e che $\phi'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 4$.

$$\begin{cases} \phi(4) = 2^4 - 4^2 = 0 \geq 0 \\ \phi'(x) = 2^x \ln 2 - 2x \end{cases}$$

Ora dobbiamo dimostrare che $\phi'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$ per ogni $x \geq 4$. Procediamo come sopra

$$\begin{cases} \phi'(4) = 2^4 \ln 2 - 2 \cdot 4 = 16 \ln 2 - 8 > 0 \\ \phi''(x) = 2^x \ln 2 \ln 2 - 2 \end{cases}$$

La seconda tesi richiede

$$\phi''(x) = 2^x \ln 2 \ln 2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \geq \frac{2}{\ln 2 \ln 2} \Leftrightarrow x \geq \log_2 \left(\frac{2}{\ln 2 \ln 2} \right) = 2.05\ldots$$

e quindi per $x \geq 4$ è dimostrata.

Secondo svolgimento

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : \ n^2 \leq c\, 2^n \ \forall n \geq n_0$$

Un modo alternativo di dimostrare la tesi è osservare che la funzione logaritmo è monotona crescente in senso stretto, per cui

$$a > b \Leftrightarrow \log a > \log b$$

qualunque sia la base del logaritmo. Ne deriva che la tesi si può riformulare come

$$n^2 \leq c\, 2^n \Leftrightarrow \log_2 n^2 \leq \log_2 (c\, 2^n) \Leftrightarrow 2 \log_2 n \leq \log_2 c + n$$

Poniamo $c = 1$ per semplicità e dimostriamo che $n \geq 2 \log_2 n$. Si può dimostrare come nell'esercizio precedente che questo è vero per $n \geq 4$, e quindi si pone $n_0 = 4$.

Esercizio 8

Dimostrare che

$$f\left(n\right) = 4n^2 \notin \Theta\left(n^3\right)$$

Svolgimento

$$\nexists c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} : c_1 n^3 \leq 4n^2 \leq c_2 n^3 \; \forall n \geq n_0$$

cioè

$$\exists n\left(c_1, c_2, n_0\right) \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ e } \begin{cases} c_1 n^3 > 4n^2 \\ \text{oppure} \\ 4n^2 > c_2 n^3 \end{cases} \qquad \forall c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N}$$

Cimentiamoci nella prima dimostrazione (la seconda è ovviamente falsa). Le ipotesi sono che $n_0 \in \mathbb{N}$, $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ e che n abbia un valore scelto da noi a piacere *dopo la scelta di* c_1, c_2 e n_0. La tesi da dimostrare è che $c_1 n^3 > 4n^2$.

Si noti l'asimmetria: siccome la definizione di Θ richiede che c_1, c_2 e n_0 siano scelti univocamente, mentre n deve assumere valori qualsiasi, e quindi che c_1, c_2 e n_0 siano scelti prima e n dopo, n è funzione di c_1, c_2 e n_0.

Al solito, semplifichiamo la tesi. Poiché sicuramente $n \geq 0$,

$$c_1 n^3 > 4n^2 \Leftrightarrow c_1 n > 4 \Leftrightarrow n > \frac{4}{c_1}$$

D'altra parte, deve anche essere $n \geq n_0$. Quindi, ponendo

$$n = \max\left(n_0, \left\lceil \frac{4}{c_1} \right\rceil + 1\right)$$

si dimostra la tesi. Si noti il $+1$, che deriva dalla disuguaglianza *stretta* nella tesi.

Esercizio 9

Dimostrare che

$$f(n) = \sqrt{n} \notin \Theta(n)$$

Svolgimento

$$\nexists c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} : c_1 n \leq \sqrt{n} \leq c_2 n \; \forall n \geq n_0$$

cioè

$$\exists n(c_1, c_2, n_0) \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ e } \begin{cases} \sqrt{n} < c_1 n \\ \quad \textit{oppure} \\ \sqrt{n} > c_2 n \end{cases} \qquad \forall c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N}$$

Si tratta di scegliere una delle due tesi alternative (ovviamente la prima) e semplificarla

$$\sqrt{n} < c_1 n \Leftrightarrow 1 < c_1 \sqrt{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{c_1^2}$$

È sempre possibile trovare un valore di n che superi questo limite inferiore e insieme anche n_0:

$$n = \max\left(n_0, \left\lceil \frac{1}{c_1^2} \right\rceil + 1\right)$$

Esercizio 10

Dimostrare che

$$f(n) = 2^n \notin \Omega(3^n)$$

Svolgimento

$$\nexists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : 2^n \geq c3^n \; \forall n \geq n_0$$

cioè

$$\exists n(c, n_0) \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ e } 2^n < c3^n \quad \forall c > 0, n_0 \in \mathbb{N}$$

Si tratta, come sempre, di semplificare la tesi

$$2^n < c3^n \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{1}{c} \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3}{2}\right)^n > \log_2\frac{1}{c} \Leftrightarrow n\log_2\left(\frac{3}{2}\right) > \log_2\frac{1}{c}$$

Poiché $3/2 > 1$, il suo logaritmo è sempre positivo e

$$n\log_2\left(\frac{3}{2}\right) > \log_2\frac{1}{c} \Leftrightarrow n > \frac{\log_2\frac{1}{c}}{\log_2\left(\frac{3}{2}\right)}$$

È sempre possibile trovare un valore di n che superi questo limite inferiore e insieme anche n_0:

$$n = \max\left(n_0, \left\lceil\frac{\log_2\frac{1}{c}}{\log_2\left(\frac{3}{2}\right)}\right\rceil + 1\right)$$

Esercizio 11

- $T_1(n) = 2^{n+1} \in O(2^n)$?
- $T_2(n) = 2^{2n} \in O(2^n)$?

Svolgimento

$$T_1(n) = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

Quindi, se $c_1 = c_2 = 2$ risulta

$$T_1(n) = 2^{n+1} = c_1\, 2^n = c_2\, 2^n \Rightarrow c_1\, 2^n \leq T_1(n) = 2^{n+1} \leq c_2\, 2^n$$

da cui $T_1(n) \in O(2^n)$.

D'altra parte

$$T_2(n) = 2^{2n} = 2^n\, 2^n$$

per cui $T_2(n) \notin O\left(2^{2n}\right)$. Infatti, posto

$$n = \max\left(n_0, \lceil \log_2 c \rceil + 1\right)$$

risulta $n \geq n_0$ e

$$n > \log_2 c \Rightarrow 2^n > c \Rightarrow T_2(n) = 2^{2n} > c\; 2^n$$

Esercizio 12

Perché è insensata l'affermazione "l'algoritmo ha una complessità almeno pari a $O\left(n^2\right)$" ?

Svolgimento Perché l'espressione "almeno" suggerisce che si tratti di un limite inferiore, mentre $T(n) \in O\left(n^2\right)$ significa che, per un'opportuna scelta di c e n_0, $T(n) \leq c\, n^2$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi la complessità non ha alcun limite inferiore (potrebbe persino essere nulla).