Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso delle articolazioni

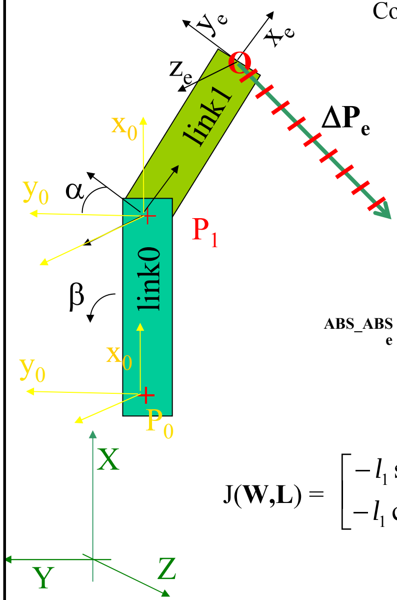
Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Animazione Digitale.

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sottodeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà di controllo.
- Analisi della soluzione ai minimi quadrati.

Cinematica inversa



Consideriamo la trasformazione end_point -> joint.

La trasformazione joint -> end_point è:
P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

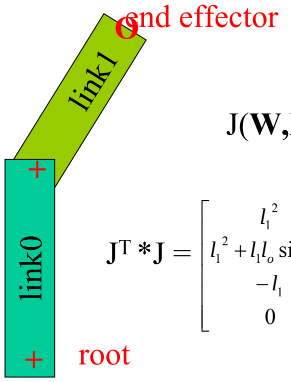
$$
{}^{\mathbf{ABS\_ABS}}_{\mathbf{e}}\mathbf{A(t)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Esempio (m = 2, n = 4)

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} dP_{e_x}/dt \\ dP_{e_y}/dt \end{bmatrix}} \qquad x = \underset{4 \times 1}{\begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ dT_x/dt \\ dT_y/dt \end{bmatrix}}
$$



Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{J}^T * \mathbf{J} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Soluzione (m=2, n=4)

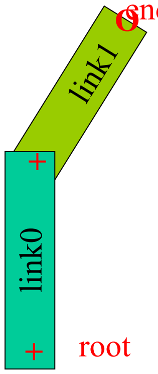
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(J^T * J) = 0$

?

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

$$\boxed{\mathbf{x = V' W^{-1} U' \, J^T \, b}}$$



W^{-1} è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} 1/w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli

Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

$x = (A'*A)^{-1} A'* b$

$$\boxed{\mathbf{x = V' W^{-1} U' \, A' b}}$$

Se A è rank-deficient, A'*A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W.

In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

Soluzione (m=2, n=4)

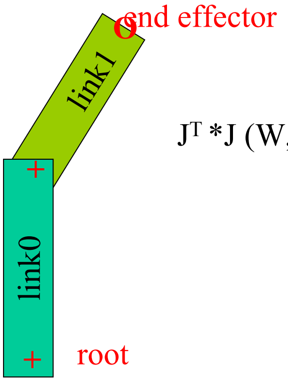
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\det(J^T * J) = 0$



$$J^T * J\ (W,L) = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

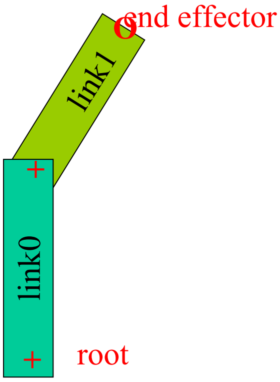
$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

$\det(J^T * J) = 0$




```
>>[U W V] = svd(JJ)
U =
  -0.4469   0.5005  -0.7398   0.0497
  -0.8633  -0.2591   0.3622   0.2375
   0.2234  -0.2502  -0.2432   0.9101
   0.0710   0.7873   0.5122   0.3359
W =
  18.1915        0        0        0
        0   1.4653        0        0
        0        0   0.0000        0
        0        0        0   0.0000
V =
  -0.4469   0.5005   0.7407   0.0336
  -0.8633  -0.2591  -0.3333  -0.2766
   0.2234  -0.2502   0.3436  -0.8771
   0.0710   0.7873  -0.4713  -0.3911
```

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2 \quad dP^e_x = 1 \quad dP^e_y = 0$

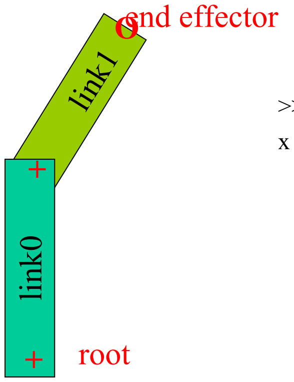
$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'J'b}}$

```
Wd =
   0.0550        0        0        0
        0   0.6824        0        0
        0        0        0        0
        0        0        0        0
>>x =  V' * Wd * U' * J' * bb
x =
  -0.2251
  -0.1281
   0.1125
  -0.1811
```

$\det(J^T * J) = 0$

NB: Matlab fornisce già V sotto forma di trasposta

Norma in l^2 pari a 0.3355



Verifica Soluzione

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

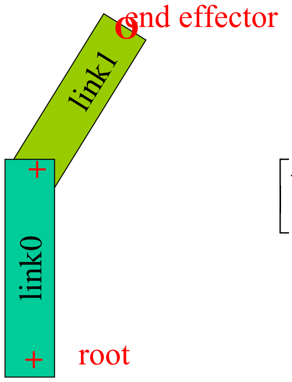
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2 \quad dP^e_x = 1 \quad dP^e_y = 0$

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'J'b}}$

J *x = dP

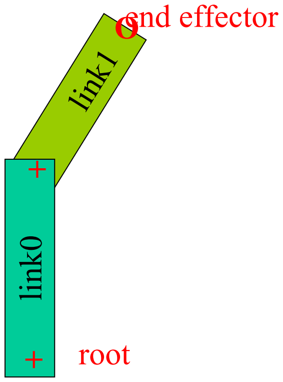
$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix} = [1\ 0]^T$$



Proprietà della Soluzione

Proprietà: soluzione a norma minima

Altre possibili soluzioni si potrebbero ottenere, ma aumentano la norma della soluzione



Quale altra soluzione sarebbe possibile?

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sottodeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà di controllo.
- Analisi della soluzione ai minimi quadrati.

Come favorire un joint

$dP = J\, d\Theta$ $\quad$ $\min \| dP - J\, d\Theta \|$ $\quad$ $\|d\Theta\|$ a norma minima

Come modificare $d\Theta$ senza che l'equazione sia alterata?

Supponiamo di volere favorire alcune soluzioni

Minimizziamo la norma della soluzione in modo esplicito pesando l'ampiezza delle componenti della soluzione.

Il problema si trasforma in un problema di regolarizzazione:

$$\min (\| J\, d\Theta - dP \| + \lambda\, C\|d\Theta\|)$$

$C(d\Theta)$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Ad esempio $C(d\Theta) = \sum_k c_k (\vartheta_k - \vartheta_{ko})^b$, esponente b pari

Sviluppo della regolarizzazione

$$\min (\| J\, d\Theta - dP \| + \lambda\, C(d\Theta))$$

$C(d\Theta)$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Ad esempio $C(d\Theta) = \sum_k c_k (\vartheta_k - \vartheta_{ko})^b$ b pari

$$2J^T(J\, d\Theta - dP) + \lambda\, C(d\Theta)/\delta\theta = 0$$

Nel caso di funzione quadratica, il risultato è relativamente semplice

$$J^T(J\, d\Theta - dV) + \lambda\, C\Theta = 0 \qquad \text{P matrice dei pesi}$$

Da cui risulta:

$$J^T(J\, d\Theta - dP) + \lambda\, C\Theta = 0$$

$$J^T(J\, d\Theta - dP) + \lambda\, C\Theta = 0$$

$$\Theta = (J^TJ + \lambda\, C)^{-1} J^T\, dP)$$

Soluzione regolarizzata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

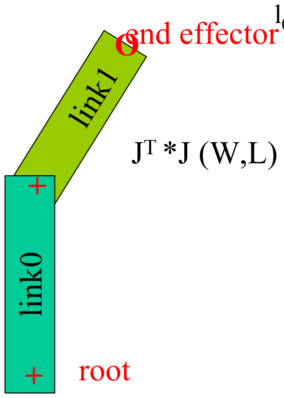
$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$

$\det(J^T * J) = 0$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$ $\boldsymbol{\lambda = 1}$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$



$$J^T * J\ (W,L) + C = \begin{bmatrix} 4 + c_1 & 4 + 2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4 + 2\sqrt{2} & 7 + 4\sqrt{2} + c_2 & -2 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2 - \sqrt{2} & 1 + c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 + c_4 \end{bmatrix}$$

Esempio regolarizzazione

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4 + c_1 & 4 + 2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4 + 2\sqrt{2} & 7 + 4\sqrt{2} + c_2 & -2 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2 - \sqrt{2} & 1 + c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 + c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

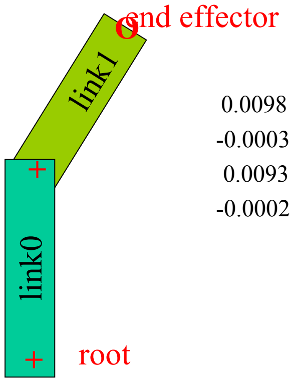
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

Supponiamo: c1 = c2 = 100; c3 = c4 = 1

\>>det = 4.3539e+004



\>>inversa =

0.0098	-0.0003	0.0093	-0.0002
-0.0003	0.0094	0.0157	0.0066
0.0093	0.0157	0.5361	0.0111
-0.0002	0.0066	0.0111	0.5047

\>>x =

-0.0093
-0.0157
0.4639
-0.0111

\>>dP =

0.5361
0.0111

Esempio regolarizzazione - II

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+p_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+p_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+p_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+p_4 \end{bmatrix}$$

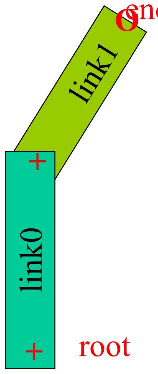
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

$\boxed{\text{Supponiamo: } c1 = c2 = 1;\ c3 = c4 = 0.01}$



>>det = 1.1992

>>inversa =

0.9656	-0.0575	1.7178	-0.0805
-0.0575	0.8843	2.8755	1.2382
1.7178	2.8755	14.1119	4.0263
-0.0805	1.2382	4.0263	2.7239

>>x

-0.0172
-0.0288
0.8589
-0.0403

>>dP =

0.9914
0.0004

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sottodeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà di controllo.
- Analisi della soluzione ai minimi quadrati.

Valutazione della bontà della stima

$x = (A'^*A)^{-1}A'^* b$

Definisco residuo la quantità [v]:

$v = Ax - b$

Errore di misura Gaussiano a media nulla $e(0,\sigma^2)$

$\langle v_{xk} \rangle = \langle v_{xy} \rangle = 0$

$$\hat{\sigma}_0^{\,2} = \sum_{k=1}^{M} \left(v_k^{\,2} \right)$$

Valutazione della bontà della stima del singolo parametro e della loro correlazione

$x = (A'^*A)^{-1}A'^* b$ $\qquad \hat{\sigma}_0^{\,2} = \sum_{k=1}^{M} \left(v_{x_k}^{\,2} \right)$

$x = C\,A'^* b$ C è chiamata anche matrice di covarianza.

Chiamiamo u e v le variabili casuali associate all'errore sui parametri e all'errore di retro-proiezione, rispettivamente. Si suppone errore a media nulla e Gaussianamente distribuito.

$x + u = C\,A'^* (b + v)$

$\Downarrow$

$u = C\,A'^* v$

Impostazione del calcolo della correlazione tra i parametri

$u = C\,A'\,v$

Vogliamo individuare la correlazione tra due parametri r ed s. Devo quindi determinare il valore atteso di $u_r * u_s$.

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_W \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_W u_1 & u_W u_2 & \dots & u_W^2 \end{bmatrix}$$

$u = C\,A'\,v \quad \Rightarrow \quad u' = v'A\,C'$

$uu' = C\,A'\,vv'A\,C'$ => Applicando l'operatore di media, si ottiene:

$<uu'> = C\,A' <vv'> A\,C'$

Dato che v sono i residui, e sono indipendenti, e tutte i punti di controllo hanno lo stesso tipo di errore di misura, si avrà che $<vv'> = I\sigma_0^2$.

Calcolo della correlazione tra i parametri

$\boxed{<uu'> = C\,A'\,I\,A\,C'\sigma_0^2 = C\,\sigma_0^2}$

Da cui si giustifica il nome di matrice di covarianza per C.

Segue che: $\sigma^2(u_{ij}) = c_{ij}\sigma_0^2$ Varianza sulla stima del parametro.

Esempi di correlazione elevata:

f <-> Z, Z0 xo, yo <-> X, Y, X0, Y0

$$-1 \le r_{ij} = \frac{<u_i u_j>}{\sqrt{<u_i>^2 <u_j>^2}} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_i c_j}} \le +1$$

Indice di correlazione tra il parametro i ed il parametro j

(empiricamente si scartano parametri quando la correlazione è superiore al 95%)

Vanno rapportati alle dimensioni dei parametri coinvolti.

Stima a massima verosimiglianza (Bayesiana)

A x = **b** + **v**

rumore (e.g. errore di misura)

Teorema di Bayes

P(**x** / **b**) $\propto$ P(**x**) P(**b** / **x**)

E' detta anche Maximum A-posteriori Probability Estimation (**MAP**)

Probabilità di ottenere i parametri **x** date le osservazioni **b** (probabilità a-posteriori)

Probabilità della soluzione **x**, (a-priori)

Probabilità condizionata di ottenere l'osservazione **b**, dato **x**

Stima a massima verosimiglianza (Bayesiana), rumore Gaussiano

A x = **b** + **v**

rumore (e.g. errore di misura) Gaussiano

P(**x** / **b**) $\propto$ P(**x**) P(**b** / **x**)

$$P(\mathbf{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x})}$$

x è distribuito come una Gaussiana con covarianza Σ

$$P(\mathbf{b} / \mathbf{x}) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}$$

Rappresenta un modello dell'errore, che è supposto Gaussiano a media nulla, con varianza σ^2.

$$P(\mathbf{x} / \mathbf{b}) \propto P(\mathbf{x})\, P(\mathbf{b} / \mathbf{x}) = e^{-\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}) + \frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})\right]}$$

Stima a massima verosimiglianza (Bayesiana), rumore Gaussiano

$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$

rumore (e.g. errore di misura) Gaussiano

$$P(\mathbf{x} / \mathbf{b}) \propto P(\mathbf{x})\ P(\mathbf{b} / \mathbf{x}) = e^{-\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x})+\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})^2\right]}$$

$$P(\mathbf{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x})} = e^{-\frac{1}{2\sigma_a^2}\mathbf{I}}$$

Supponiamo di conoscere la distribuzione a priori della soluzione: Gaussiana con varianza σ^2.

$$P(\mathbf{x} / \mathbf{b}) \propto P(\mathbf{x})\ P(\mathbf{b} / \mathbf{x}) = e^{-\left[\frac{1}{2\sigma_a^2}\mathbf{I}+\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})^2\right]}$$

cost

$\max P(\mathbf{x} / \mathbf{b}) = \min (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})^2$ Stima ai minimi quadrati

Stima a massima verosimiglianza (Bayesiana), rumore Gaussiano, a-priori generale

$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$

rumore (e.g. errore di misura) Gaussiano

$$P(\mathbf{x} / \mathbf{b}) \propto P(\mathbf{x})\ P(\mathbf{b} / \mathbf{x}) = e^{-\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x})+\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})^2\right]}$$

$$P(\mathbf{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{x})}$$

Supponiamo di conoscere la distribuzione a priori della soluzione e che sia generica ma rappresentabile con un operatore lineare, **P**.

$$P(\mathbf{x} / \mathbf{b}) \propto P(\mathbf{x})\ P(\mathbf{b} / \mathbf{x}) = e^{-\left[\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}+\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})^2\right]}$$

cost

$\max P(\mathbf{x} / \mathbf{b}) = \min [(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})^2 + \lambda\|\mathbf{P}\mathbf{x}\|^2]$ Regolarizzazione

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sottodeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà di controllo.
- Analisi della soluzione ai minimi quadrati.