La cinematica Inversa

Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Animazione Digitale.

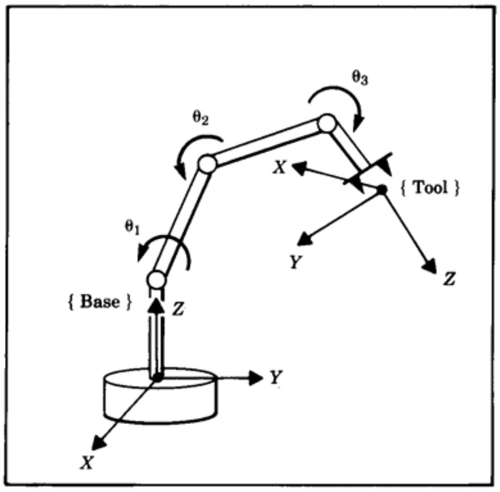
Riassunto

- La cinematica inversa
- La linearizzazione
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni

Cinematica diretta e inversa

Conosco il valore dei joint (angolo o offset) ➔ posizione ed orientamento dell'end-point.

Conosco la posizione e l'orientamento dell'end-point ➔ devo determinare il valore dei joint.



La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.

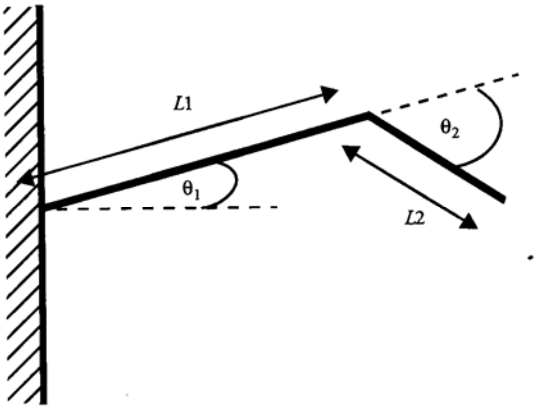
La cinematica inversa

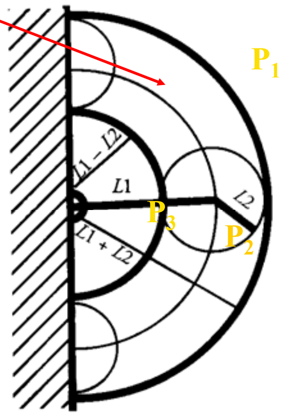
Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.

Problema sotto-determinato (over-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?

Soluzione diretta

Working space

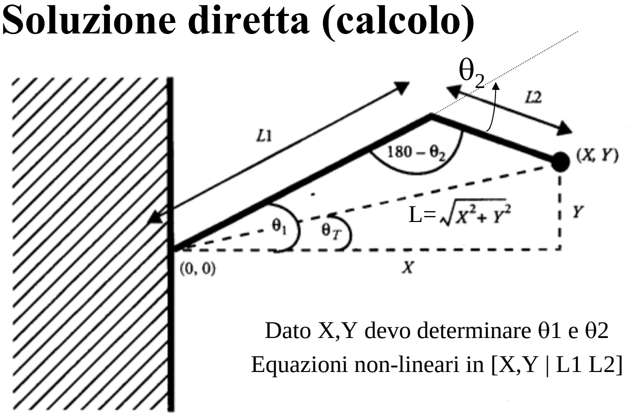




Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \| P \| \leq L_1 + L_2$

Possibili configurazioni:
P_1 - nessuna soluzione.
P_2 - due soluzioni.
P_3 - una soluzione.

Soluzione diretta (calcolo)

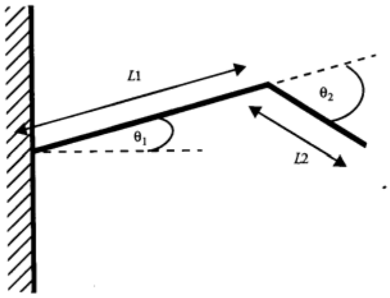


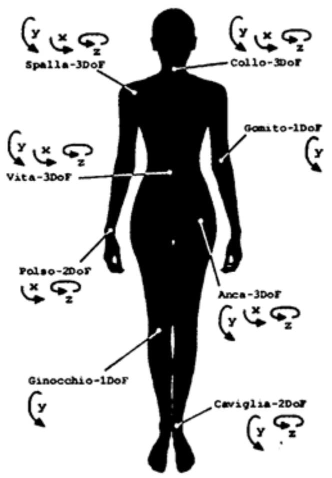
Dato X,Y devo determinare θ1 e θ2
Equazioni non-lineari in [X,Y | L1 L2]

E' un problema di trigonometria!

- Calcolo $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare $\cos\theta_2$: $\cos(\vartheta_2) = (L_1^2 + L_2^2 - L^2)/(2L_1L_2)$
- Calcolo di $\cos\theta_T$: $\cos(\vartheta_T) = X / \sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare $\cos(\theta_1 - \theta_T)$: $\cos(\vartheta_R) = (L_1^2 + L^2 - L_2^2)/(2L_1L)$

Cerniere 3D





∞^1 soluzioni

NB: gli umani ne scelgono una sola.

Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.

Caratteristiche della cinematica inversa

- Soluzione di equazioni non-lineari.
- Workspace (spazio nel quale si può posizionare l'end-effector).
- Dexterous workspace. Spazio nel quale si può posizionare l'end-effector con un qualsiasi orientamento.
- C.N. Per potere raggiungere una qualsiasi posizione ed orientamento nello spazio di lavoro, è che il numero di gradi di libertà dei segmenti del braccio robotico sia almeno uguale al numero di gradi di libertà dell'end-point.
- Soluzione geometrica od analitica complessa da determinare.

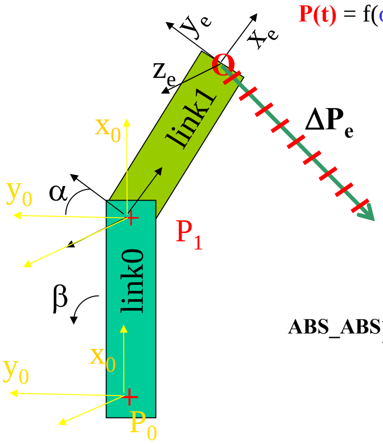
Riassunto

- La cinematica inversa
- La linearizzazione
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

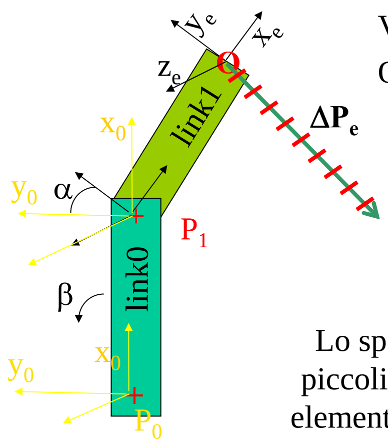


$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}\,(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

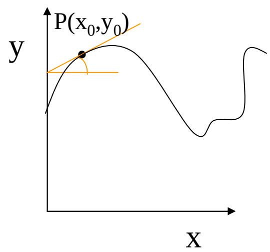
Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Linearizzazione: 1 variabile

$$y_0 = f(x_0)$$

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} dx^2 + \ldots$$

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x$$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

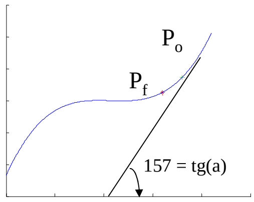
- Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di P(xo,yo).
- Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Linearizzazione

$y = x^3 - 2*x^2 - 3*x + 1$

Consideriamo il punto $P_o(8, 361)$

Supponiamo di conoscere il Δy desiderato per arrivare in P_f: $\Delta y = -234$, quale Δx devo applicare?



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di P(xo,yo):

$y - 361 = (3 * x^2 - 4*x - 3)_{x=8} (x - 8) \Rightarrow y_f - 361 = 157 * (x_f - 8)$

Potremmo risolvere l'equazione lineare in x:

$(-234+1256)/157 = x \Rightarrow x = 6.5096$

errato, la soluzione sarebbe x = 6.

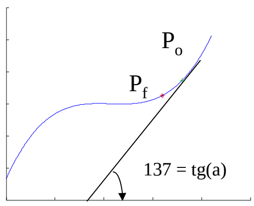
Perchè?.

Soluzione iterativa mediante linearizzazione (primo passo)

$y = x^3 - 2*x^2 - 3*x + 1$

Consideriamo il punto $P_o(8, 361)$

Supponiamo di conoscere il Δy desiderato per arrivare in P_f: che ha ordinata y = 127. $\Delta y = -234$, quale Δx devo applicare?



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di P(xo,yo).

Cerco una soluzione locale (nell'intorno di y0).

Dò quindi un incremento piccolo a Δy nella direzione desiderata: $\Delta y = -50$.

$y - 361 = (3 * x^2 - 4*x - 3)_{x=8} (x - 8) \Rightarrow y_f - 361 = 157 * (x - 8)$

$-50 = 157 * (x - 8) \Rightarrow x = (-50 + 1256)/157 = 7.6815$

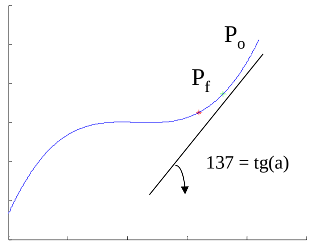
Mi sposto quindi ti una piccola quantità (8 – 7.6815) nella direzione desiderata.

Soluzione iterativa mediante linearizzazione (passi ulteriori)

$y = x^3 - 2*x^2 - 3*x + 1$

Consideriamo il punto attuale: P(7.6815, **313.1949**)

NB La funzione era stata sottostimata per effetto dell'approssimazione lineare.



Dò un altro piccolo incremento Δy nella direzione desiderata: $\Delta y = -50$.

$$y - 313.1949 = (3 * x^2 - 4*x - 3)_{x = 7.6815} (x - 7.6815)$$

=>

$$-50 = 143.2903 * (x - 7.6815) \quad =>$$

$$x = (-50 + 1100.7) / 143.2903 = 7.3327$$

Mi sposto quindi ti una piccola quantità (7.6815 – 7.3327) nella direzione desiderata.

Sono arrivato al punto P(7.3327 265.7331).

Devo arrivare a y = 127.

Si continua così fino a quando $y = P_f(.)$

Riassunto

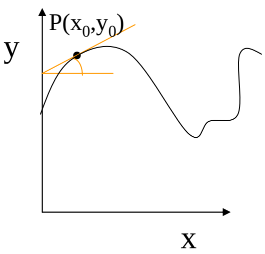
- La cinematica inversa
- La linearizzazione
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni

Linearizzazione – 1 variabile

$$y_0 = f(x_0)$$

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} dx^2 + \ldots$$

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x$$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

- Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di P(xo,yo).
- Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Cosa succede per funzioni di più variabili (**P(t)** = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1))?

La funzione posizione

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.
E' rappresentata da M (gradi di libertà dell'end-point) funzioni in N incognite (i parametri liberi).
P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

P_x(t) = f_x(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).
P_y(t) = f_y(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).
P_z(t) = f_z(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$${}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_e(t) = A(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)[0\ 0\ 0\ 1]^T$$

$${}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A(t)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili

z = f(x,y)

$$z - z_o = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P=P_0} dy}_{} + \frac{1}{2}\left\{ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P=P_0} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P=P_0} + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P=P_0} dy^2 \right\} + \ldots$$

Parte lineare

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

Chiamiamo **$W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

Il Jacobiano

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

$\mathbf{P(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | \, l_0, l_1)$.

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | \, l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | \, l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | \, l_0, l_1)$.

J

Chiamiamo $\mathbf{W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]}$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Caratteristiche del Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Come vengono trattate le velocità

Dividendo entrambi i membri per Δt si ottiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}\,\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale $\forall$valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Jacobiano e velocità

$d\mathbf{P}_e(\mathbf{t}) = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, d\mathbf{W(t)} \;\Rightarrow\; d\mathbf{P}_e(\mathbf{t}) / dt = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, d\mathbf{W(t)} / dt$

Chiamiamo $\mathbf{W}(\mathbf{t}_k)$= [A(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\boxed{V_{\mathbf{P_e}}(t_k) = J(\mathbf{W}(\mathrm{t}_k), \mathbf{L})\,\dot{W}(\mathrm{t}_k)}$$

Parametri liberi

Parametri geometrici

$\forall$k, cambia il valore di J, l'espressione analitica rimane valida.

Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{P_e(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\Delta\mathbf{W(t)}$$

Chiamiamo $\mathbf{W_k(t)}$= [A(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare dallo spazio dei parmetri liberi a quello dell'end-point: $\Delta\mathbf{W(t)}$ -> $\Delta\mathbf{P_e(t)}$

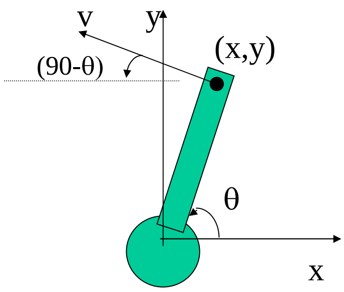
Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

Riassunto

- La cinematica inversa
- La linearizzazione
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni

Esempio di determinazione del Jacobiano

$x = r\cos(\theta)$
$y = r\sin(\theta)$



$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

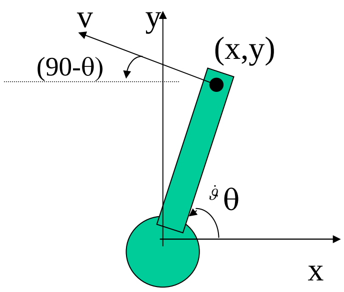
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta\end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

$\mathbf{V = \omega \Lambda r}$ Sono due espressioni equivalenti $\forall$k $\mathbf{V = J_{\theta=\theta k}\dot{\Theta}}$

$\mathbf{V}_{2x1}$ $\mathbf{J}_{2x1}$ $\dot{\mathbf{\Theta}}_{1x1}$

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$



$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta\end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

$\theta_k = 0$

$V_x = -r\sin(0)\ \dot{\vartheta} \quad = 0$

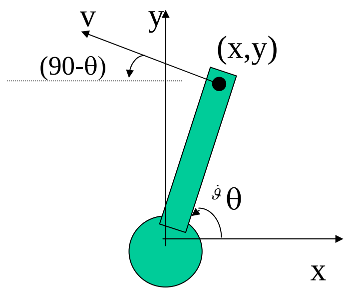
$V_y = r\cos(0)\ \dot{\vartheta} \quad = r\ \dot{\vartheta}$

$$\mathbf{V = \omega \Lambda r} \longrightarrow \mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

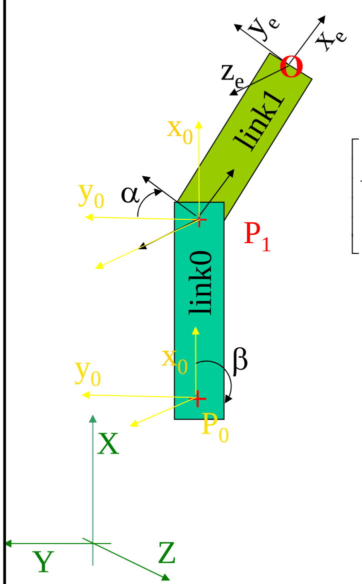
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta\end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$



$$V_x = -r\sin(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$$
$$V_y = r\cos(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$$

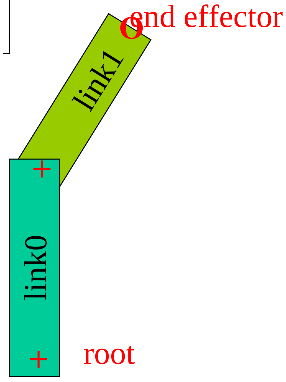
V = ωΛr $\Longrightarrow$ $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k\\ 0 & 0 & \dot{\vartheta}\\ r\cos\vartheta & r\sin\vartheta & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin(\vartheta)\dot{\vartheta}\\ r\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}\\ 0\end{bmatrix}$

Cinematica diretta



$${}^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix}(l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta + T_x\\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta + T_y\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$



Il Jacobiano dell'esempio

$$
{}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta + T_x \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin\alpha\cos\beta - l_1\cos\alpha\sin\beta & -l_1\cos\alpha\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ +l_1\sin\alpha\sin\beta - l_1\cos\alpha\cos\beta & -l_1\cos\alpha\cos\beta + l_1\sin\alpha\sin\beta - l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

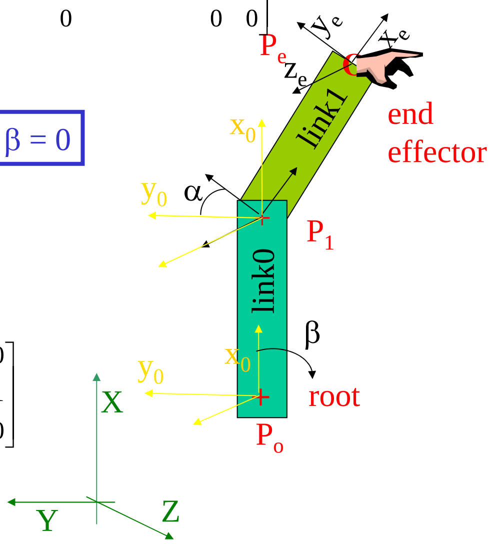
Esempio di calcolo dello spostamento – I

$$
J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$W_k = [0, 0, P_{ox}, P_{oy}]$

$$
J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$



Esempio di calcolo dello spostamento – II

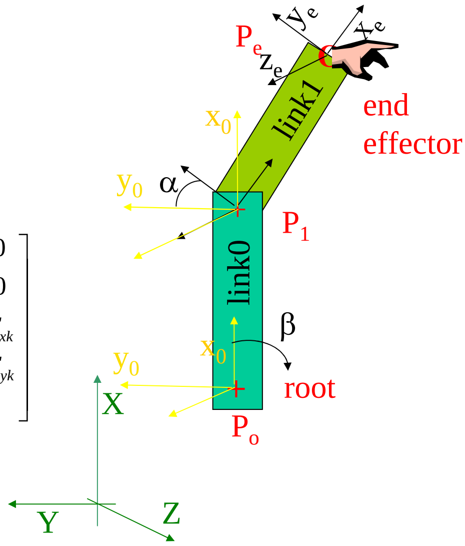
Caso particolare: α = β = 0

$$J(\mathbf{W_k,L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(\mathrm{t}), \mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} (P_x - P_{x_k}) \\ (P_y - P_{y_k}) \\ (P_z - P_{z_k}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (P_x - P_{x_k}) \\ (P_y - P_{y_k}) \\ (P_z - P_{z_k}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ -l_0\Delta a - (l_0 + l_1)\Delta\beta + T_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

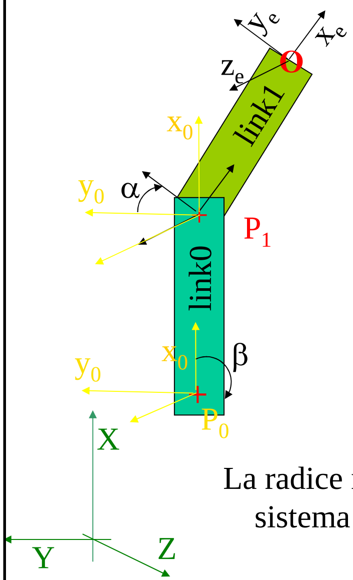


Caso semplificato

Elimino 2 gradi di libertà: Tx e Ty.

$$^{\mathbf{P0\_ABS}}\mathbf{P} = {}^{\mathbf{ABS\_ABS}}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}\ {}^{\mathbf{P0\_L0}}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



La radice non si sposta rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il Jacobiano dell’esempio semplificato

$$\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{ABS\_ABS}} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Non tutti gli spostamenti sono possibili

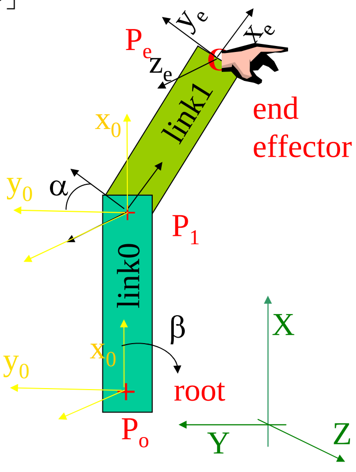
$$\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $W_k = [0, 0]$

$$\mathrm{J}(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$

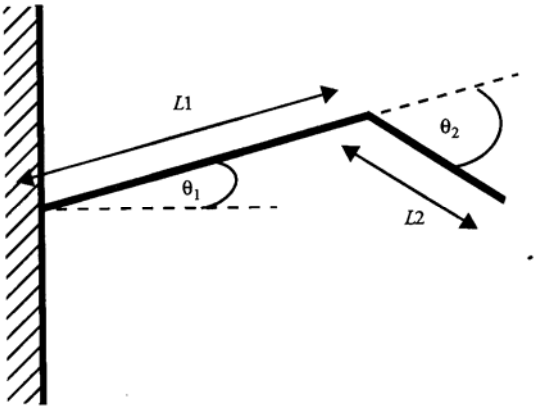
$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \Delta a + (-l_0 + l_1)\Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

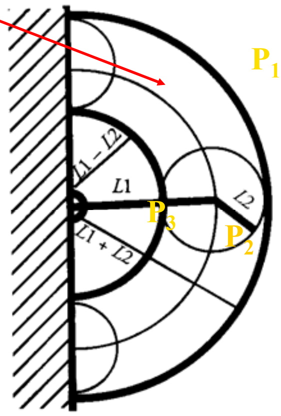


E’ possibile spostarsi solamente in direzione perpendicolare al braccio (lungo la perpendicolare al braccio) per $\alpha = \beta = 0$

Soluzione diretta

Working space





Possibili configurazioni:
P_1 - nessuna soluzione.
P_2 - due soluzioni.
P_3 - una soluzione.

Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \| P \| \leq L_1 + L_2$

Riassunto

- La cinematica inversa
- La linearizzazione
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni