



Cinematica degli scheletri



Corso di Animazione Digitale
Laurea Specialistica in Informatica
Università degli Studi di Milano
Prof. Alberto Borghese
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borgnese@dsi.unimi.it



A.A. 2004-2005

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Riassunto




- **Dall'end-effector alla base.**
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Notazione di Denavit-Hartenberg
- La cinematica diretta.
- Introduzione alla cinematica inversa.

A.A. 2004-2005

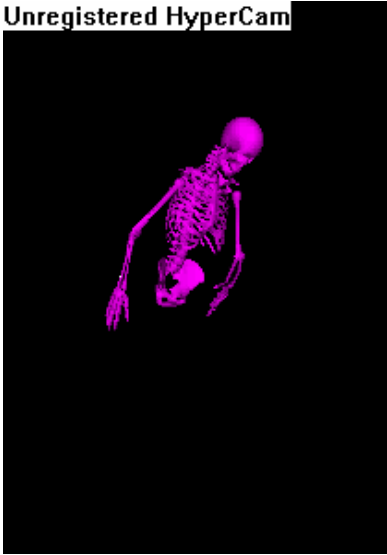
2/34


<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Cinematica di uno scheletro


Unregistered HyperCam






Curve di animazione associate ai gradi di libertà.

A.A. 2004-2005
3/34
<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Convenzioni

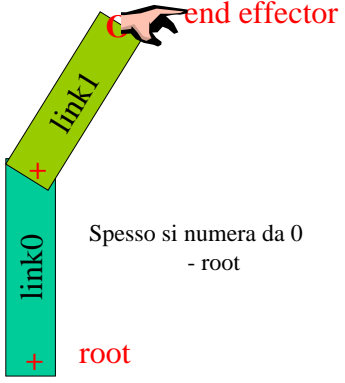


$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^r \mathbf{P} = {}^r \mathbf{A} {}^e \mathbf{P}$$

Frame di riferimento
del punto

Trasformazione
del frame e nel
frame r



Spesso si numerava da 0
- root

A.A. 2004-2005
4/34
<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Posizione dei segmenti (I)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$
 Punto espresso nel frame dell'end-effector.

Trasformiamo ${}^e\mathbf{P}$ fino ad esprimerlo nel sistema di riferimento assoluto XYZ: ${}^a\mathbf{P}$.

A.A. 2004-2005 5/34 <http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Posizione dei segmenti (II)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P1}L1\mathbf{P} = {}^{P1}L1\mathbf{A}{}^e\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]$

$${}^{P1}L1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2004-2005 6/34 <http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Posizione dei segmenti (III)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

P_1

α

x_0

y_0

z_e

x_e

y_e

Z

Y

X

$${}^{P1_L0}\mathbf{P} = {}^{P1_L1}_{P1_L0}\mathbf{A} {}^{P1_L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

link0

link1

+

+

root

$${}^{P1_L1}_{P1_L0}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2004-2005 7/34 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Posizione dei segmenti (IV)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

P_1

α

x_0

y_0

z_e

x_e

y_e

Z

Y

X

$${}^{P0_L0}\mathbf{P} = {}^{P0_L1}_{P0_L0}\mathbf{A} {}^{P0_L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

link0

link1

+

+

root

$${}^{P0_L1}_{P0_L0}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2004-2005 8/34 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Posizione dei segmenti (V)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

$${}^{P_0_ABS}\mathbf{P} = {}^{P_0_ABS}_{P_0_IO}\mathbf{A} \ {}^{P_0_LO}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0_ABS}_{P_0_IO}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0_LO}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector
 link1
 link0
 root

A.A. 2004-2005 9/34 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Posizione dei segmenti (VI)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

$${}^{ABS_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS_ABS}_{P_0_ABS}\mathbf{A} \ {}^{P_0_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$${}^{ABS_ABS}_{P_0_ABS}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

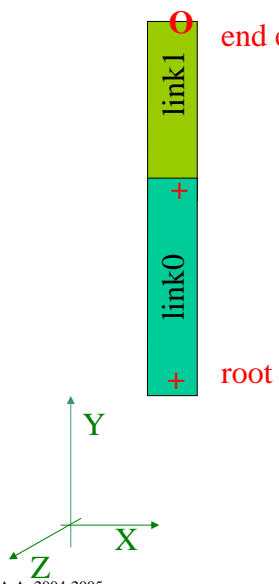
$${}^{P_0_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector
 link1
 link0
 root

A.A. 2004-2005 10/34 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Esempio di calcolo della posizione



end effector

root

$\alpha = \beta = 0$



$$\mathbf{ABS_ABSP} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2004-2005

11/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Riassunto

- Dall'end-effector alla base.
- **Osservazioni sulle matrici di trasformazione.**
- Notazione di Denavit-Hartenberg
- La cinematica diretta.
- Introduzione alla cinematica inversa.

A.A. 2004-2005

12/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Dall'end-effector alla base



- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}] {}^e\mathbf{P}$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} = {}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}$$

A.A. 2004-2005

13/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

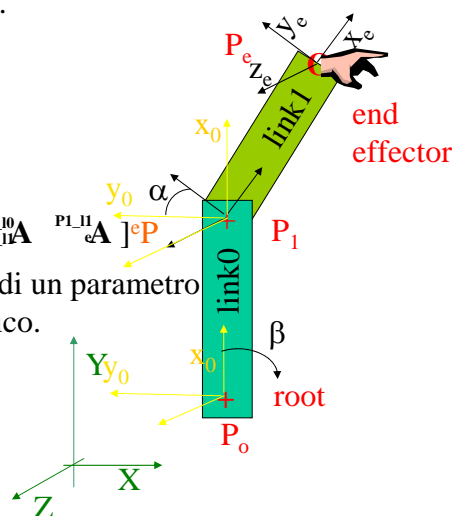
A è funzione di:

- Geometria
- Parametri liberi

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}] {}^e\mathbf{P}$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A}(\mathbf{T}) \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A}(\beta) \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A}(\mathbf{I}_0) \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A}(\alpha) \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}(\mathbf{I}_1)] {}^e\mathbf{P}$$



A.A. 2004-2005

14/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Quante matrici di trasformazione?



- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.

- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.



Riassunto



- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- **Notazione di Denavit-Hartenberg**
- La cinematica diretta.
- Introduzione alla cinematica inversa.

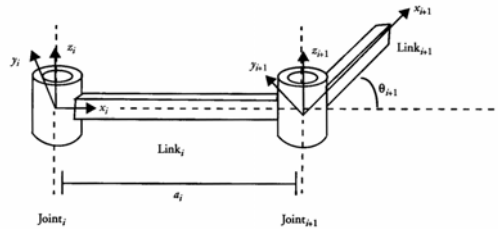


Descrizione di un link rotatorio



Ipotesi:

- Cerniere con 1 dof.
- L'asse z è orientato come l'asse di rotazione.
- L'asse x è orientato da P_i a P_{i+1} .



Denavit-Hartenberg notation

NB: 1 grado di libertà per joint.

$${}^i_{i+1}A = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{i+1}) & \sin(\vartheta_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(\vartheta_{i+1}) & \cos(\vartheta_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2004-2005

17/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



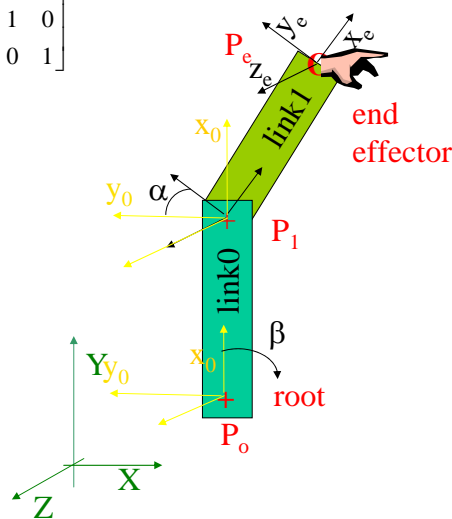
DH notation applicata al nostro esempio



$${}^i_{i+1}A = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{i+1}) & \sin(\vartheta_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(\vartheta_{i+1}) & \cos(\vartheta_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1_{I0}}_e A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & l_1 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P0_{ABS}}_{P1_{I0}} A = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & l_0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2004-2005

18/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

DH notation applicata al nostro esempio (II)

$${}^i A_{i+1} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{i+1}) & \sin(\vartheta_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(\vartheta_{i+1}) & \cos(\vartheta_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si suppone che la base del braccio trasli e non ruoti rispetto all'ambiente esterno.

$$A_{P0_ABS}^{ABS_ABS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ABS_ABS P = [\begin{matrix} ABS_ABS \\ P0_ABS A \end{matrix} \quad \begin{matrix} P0_ABS \\ P0_10 A \end{matrix} \quad \begin{matrix} P0_10 \\ P1_10 A \end{matrix} \quad \begin{matrix} P1_10 \\ P1_11 A \end{matrix} \quad \begin{matrix} P1_11 \\ e P \end{matrix}]$$

$$ABS_ABS P = ({}_{P0_ABS}^{ABS} A {}_{P1_10}^{P0_ABS} A {}_{e}^{P1_10} A) P_e$$

Verificare che risulta la trasformazione iniziale.

A.A. 2004-2005 19/34 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Descrizione di un joint 3D - I

Vengono identificati gli assi passanti per due joint adiacenti, i ed i+1.

a_i – lunghezza del segmento a minima distanza (*link length*).

Simile al caso piano.

L'angolo θ_i viene calcolato in modo che l'asse x_i e x_{i+1} appartengano allo stesso piano (*joint rotation*).

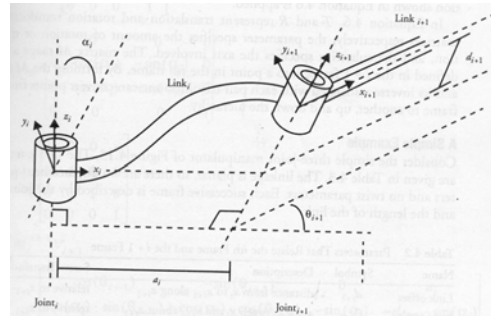
A.A. 2004-2005 20/34 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese



Descrizione di un joint 3D - II



d_i – distanza lungo l'asse z_{i+1} dell'origine di z_i rispetto all'origine di z_{i+1} (*link offset*)



α_i – angolo tra i 2 assi (z_i e z_{i+1}) misurato sul piano perpendicolare al vettore minima distanza. Angolo misurato tra a_i ed a_{i+1} (*link twist*).



Osservazioni



I 4 parametri, θ , a , α , d , sono riferiti ad i 2 segmenti adiacenti il segmento i .

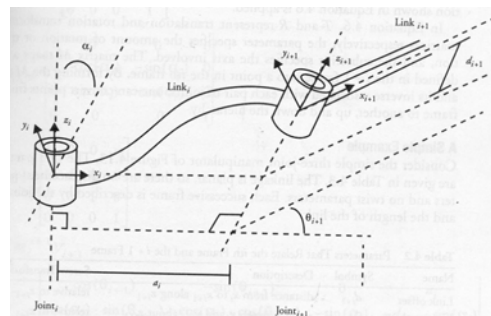
DH Parameters for i

Link length (a_i): distanza di z_i da z_{i+1} lungo l'asse x_i .

Joint angle (θ_i): angolo tra x_{i-1} e x_i attorno all'asse z_i .

Link offset (d_i): distanza di x_{i-1} da x_i rispetto a z_i .

Link twist (α_i): angolo tra z_i e z_{i+1} rispetto ad x_i .



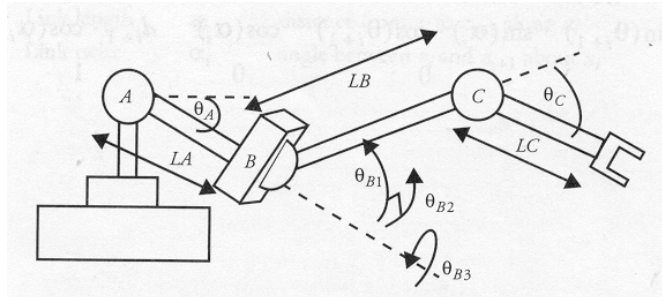
2 roto-traslazioni:

A) θ_i e d_i riguardano il link $i+1$ rispetto al link i e sono calcolati rispetto all'asse z_i .

B) a_i e α_i riguardano il link $i+1$ rispetto al link i e sono calcolati rispetto all'asse x_i .



Descrizione di cerniere 3D



Composizione di rotazioni semplici e traslazioni.



Riassunto



- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Notazione di Denavit-Hartenberg
- **La cinematica diretta.**
- Introduzione alla cinematica inversa.

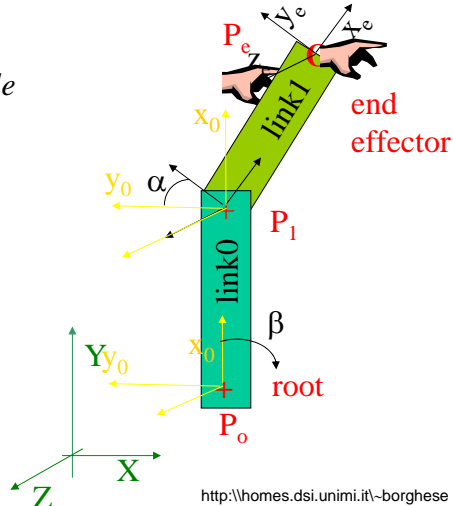


La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dalla base all'end-effector.



A.A. 2004-2005

25/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Come animare uno scheletro



Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio robotico.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?

A.A. 2004-2005

26/34

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Joint space (peso dei joint)

Rotazione attorno a P_0 (angolo β) Rotazione attorno a P_1 (angolo α)

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

A.A. 2004-2005 27/34 <http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

end effector

root

$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) \ e^P$$

${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$
 ${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$
 ${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$

A.A. 2004-2005 28/34 <http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Descrizione cinematica diretta

$${}^{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{ABS_ABS}P(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Sequenza temporale di $[\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$ sequenza temporale di ${}^{ABS_ABS}P(t)$.

ghese

Riassunto

- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Notazione di Denavit-Hartenberg
- La cinematica diretta.
- **Introduzione alla cinematica inversa.**

A.A. 2004-2005 30/34 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese



Generazione del movimento

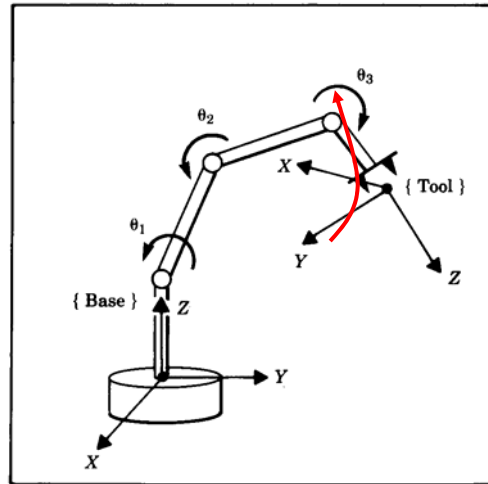


Generazione della traiettoria dell'end-effector o dei joint.

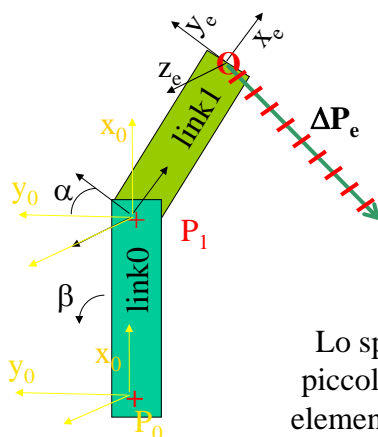
Definizione di un punto di arrivo e di punti di passaggio dell'end effector (via-points).

Definizione di pochi punti ed interpolazione (spline).

Movimento mediante variazione degli angoli articolari.



Cinematica inversa



Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

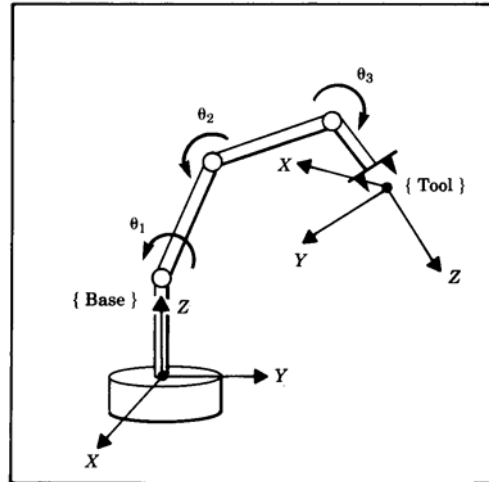


Cinematica diretta e inversa



Conosco il valore dei joint
(angolo o offset) →
posizione ed orientamento
dell'end-point.

Conosco la posizione e
l'orientamento dell'end-point
→ devo determinare il valore
dei joint.



La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.



Riassunto



- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Notazione di Denavit-Hartenberg
- La cinematica diretta.
- Introduzione alla cinematica inversa.