



Sommatori e Moltiplicatori

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Appendice C5 prima parte. Per approfondimenti e HW della moltiplicazione consultare il Fummi.



Sommario

Sommatori

Moltiplicatori



Somma e prodotto logico



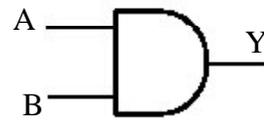
Somma => OR

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



Moltiplicazione
=> AND

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



AND e OR su più bit



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|

AND

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|

=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|

OR

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|

=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|



(Half) Adder ad 1 bit

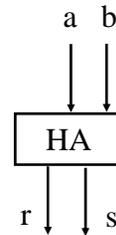
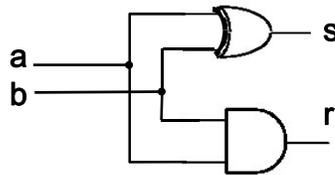


Tabella della verità della somma:

| a | b | somma | riporto |
|---|---|-------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

$$s = a \oplus b$$

$$r = ab$$



La somma è diventata un'operazione logica!

Cammini critici:

Somma = 1;

Riporto = 1;

Complessità

Somma = 1 porta;

Riporto = 1 porta;



Full Adder ad 1 bit



Tabella della verità della somma completa:

| a | b | r_{in} | somma | riporto |
|---|---|----------|-------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$s = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

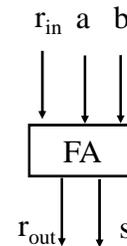
$$r = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$s = \bar{a} \bar{b} r_{in} + a \bar{b} r_{in} + \bar{a} b r_{in} + a b r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (ab + \bar{a}b) r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = a \bar{b} r_{in} + \bar{a} b r_{in} + a b r_{in} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



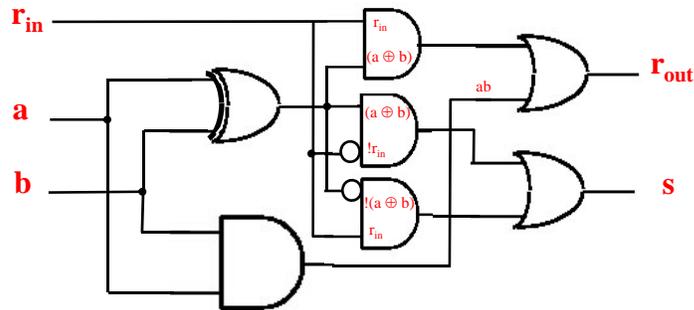


Implementazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



7 porte logiche.
Cammini critici: $s \rightarrow 3$; $r_{out} \rightarrow 3$



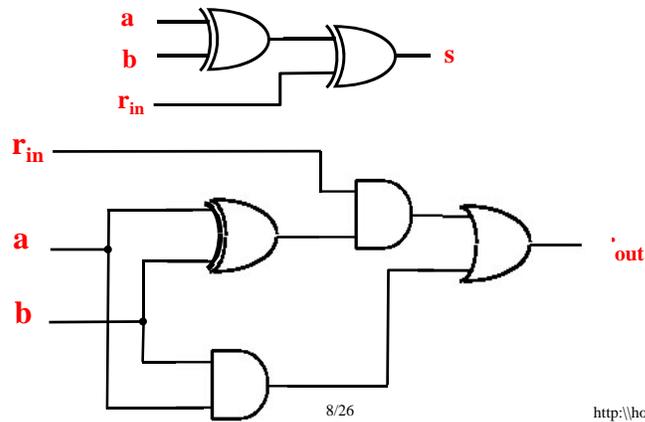
Semplificazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \bar{r}_{in} + \overline{(a \oplus b)} r_{in} = (a \oplus b) \oplus r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

5 porte logiche.
Cammini critici: $s \rightarrow 2$; $r_{out} \rightarrow 3$

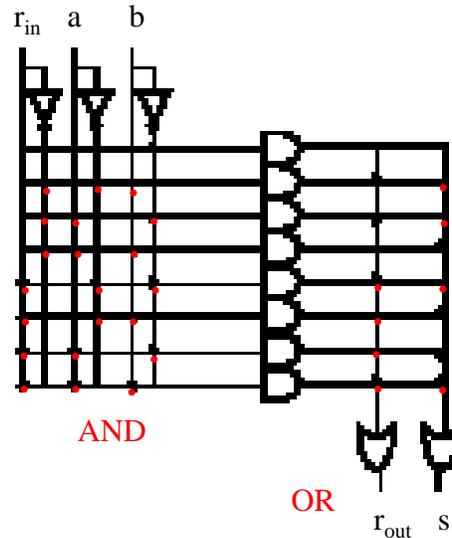




Implementazione mediante PLA



| a | b | r_{in} | somma | r_{out} |
|---|---|----------|-------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



SOP: costruisco i mintermini e li sommo.



Complessità circuitale



- Definire la complessità circuitale e il cammino critico di HA:
 - $s = m1 + m2$
 - $r = m3$
- Definire la complessità circuitale e il cammino critico di FA:
 - $s = m1 + m2 + m4 + m7$
 - $r = m3 + m5 + m6 + m7$

Traccia: $m1$ è un circuito con 3 ingressi ed un'uscita e si può spezzare in due parte AND in cascata.



Esercizi con ROM e PLA



Implementare il circuito del Full Adder mediante ROM

Scrivere il circuito che esegue la somma di: $3 + 4$ in base 2.
Riportare tutte le uscite delle porte logiche.

Scrivere il circuito che esegue la seguente sottrazione: $5-2$ in base 2.
Riportare tutte le uscite delle porte logiche.



Sommario



Addizionatori

Moltiplicatori



Moltiplicazione binaria



Moltiplicatore \longrightarrow 1 1 0 1 1 x
 Moltiplicando \longrightarrow 1 1 1 =

$$\begin{array}{r}
 11011 \times 27_{10} \\
 111 = 7_{10} \\
 \hline
 111111 \\
 11011+ \\
 11011- \\
 11011- - \\
 \hline
 10111101 \quad 189_{10}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \hline
 11111 \\
 11011+ \\
 11011- \\
 \hline
 1 \\
 1010001+ \\
 11011- - \\
 \hline
 \end{array}$$

prodotti parziali

prodotto \longrightarrow 1 0 1 1 1 0 1



Moltiplicazione mediante shift



Lo shift di un numero a dx, di k cifre, corrisponde ad una divisione per la base elevata alla k-esima potenza.

Lo shift di un numero a sx, di k cifre, corrisponde ad una moltiplicazione per la base elevata alla k-esima potenza.

Esempio:

$$213_{10} / 10 = 21.3_{10}$$

$$\begin{aligned}
 213_{10} &= (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) / 10^1 = \\
 &= (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \times 10^{-1} = \\
 &= (2 \times 10^2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^1 \times 10^{-1} + 3 \times 10^0 \times 10^{-1}) = \\
 &= (2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1}) = 21.3 \text{ cvd.}
 \end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
 23 / 4 = 5,75 \Rightarrow 10111 / 100 = \\
 (1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0) \times 2^{-2} = \\
 (1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} + 1x2^{-2}) = 5,75 \text{ cvd.}
 \end{aligned}$$



Moltiplicazione binaria



Moltiplicando \longrightarrow 1 1 0 1 1 x
 Moltiplicatore \longrightarrow 1 1 1 =

| | |
|--|-----------------|
| 1 1 0 1 1 x 27_{10} | |
| 1 1 1 = 7_{10} | |
| | |
| 1 1 1 1 1 1 + | 1 1 1 1 1 |
| 1 1 0 1 1 + | 1 1 0 1 1 + |
| 1 1 0 1 1 - | 1 1 0 1 1 - |
| 1 1 0 1 1 - - | 1 |
| | |
| 1 0 1 1 1 1 0 1 189_{10} | 1 0 1 0 0 0 1 + |
| | 1 1 0 1 1 - - |
| | |
| Prodotto \longrightarrow 1 0 1 1 1 1 0 1 | |



Moltiplicazione binaria



Moltiplicando \longrightarrow 1 1 0 1 1 x 27_{10}
 Moltiplicatore \longrightarrow 1 0 1 1 = 11_{10}

| | |
|--|---------------------------|
| | |
| | |
| | |
| Prodotti parziali | 1 1 1 1 1 |
| | 1 1 0 1 1 + 27_{10} |
| | 1 1 0 1 1 - 27_{10} |
| | |
| Riporto | 0 0 0 0 0 |
| | 1 0 1 0 0 0 1 + 27_{10} |
| | 0 0 0 0 0 - - 27_{10} |
| | |
| Somma parziale | 1 1 0 1 0 |
| | 1 0 1 0 0 0 1 + |
| | 1 1 0 1 1 - - - = |
| | |
| Prodotto \longrightarrow 1 0 0 1 0 1 0 0 1 $\rightarrow 297_{10}$ | |



Moltiplicazione binaria (su 4 bit)



Moltiplicando \longrightarrow
 Moltiplicatore \longrightarrow

Prodotti parziali (AND) \longrightarrow
 Somma parziale (Sommatori) \longrightarrow
 Prodotto \longrightarrow

| | | |
|-------------|--------------------------------|---|
| 1 0 1 1 x | 1 1 ₁₀ | |
| 1 0 1 = | 5 ₁₀ | |
| 0 0 0 0 | | |
| 1 0 1 1 + | 1 0 1 1 * 1 * 2 ⁰ = | |
| 0 0 0 0 - | 1 0 1 1 * 0 * 2 ¹ = | |
| 1 0 1 1 | | |
| 1 0 1 1 - - | 1 0 1 1 * 1 * 2 ² = | + |
| 1 1 0 1 1 1 | | |
| | 5 5 ₁₀ | |

Il prodotto parziale è = $\begin{cases} \text{Moltiplicando incolonnato opportunamente} \\ 0 \end{cases}$



La moltiplicazione binaria



Possiamo vederla come:

Un primo stadio in cui si mette in AND ciascun bit del moltiplicatore con il moltiplicando.

Un secondo stadio in cui si effettuano le somme (full adder) dei bit sulle righe contenenti i prodotti parziali.



La matrice dei prodotti parziali



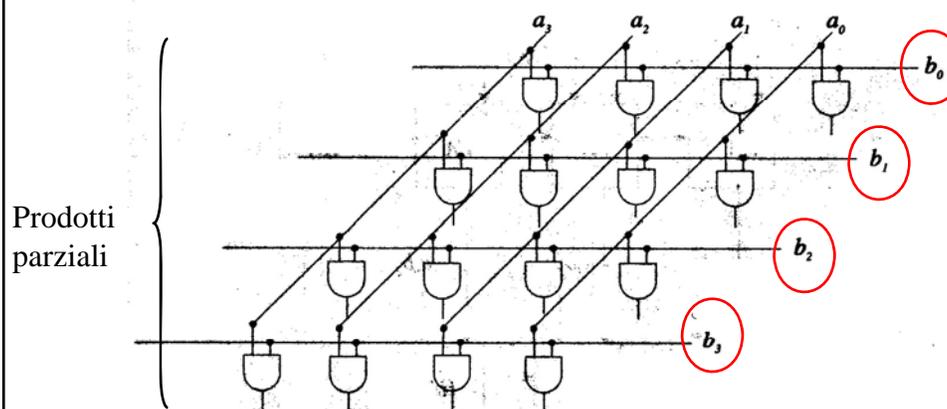
Prodotti parziali

| | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 | |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|
| | $a_3 b_0$ | $a_2 b_0$ | $a_1 b_0$ | $a_0 b_0$ | b_0 |
| | $a_3 b_1$ | $a_2 b_1$ | $a_1 b_1$ | $a_0 b_1$ | b_1 |
| | $a_3 b_2$ | $a_2 b_2$ | $a_1 b_2$ | $a_0 b_2$ | b_2 |
| | $a_3 b_3$ | $a_2 b_3$ | $a_1 b_3$ | $a_0 b_3$ | b_3 |

In binario i prodotti parziali sono degli AND.



Il circuito che effettua i prodotti





Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali



| | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|-------|
| | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 | |
| | a_3b_0 | a_2b_0 | a_1b_0 | a_0b_0 | b_0 |
| | a_3b_1 | a_2b_1 | a_1b_1 | a_0b_1 | b_1 |
| | a_3b_2 | a_2b_2 | a_1b_2 | a_0b_2 | b_2 |
| | a_3b_3 | a_2b_3 | a_1b_3 | a_0b_3 | b_3 |

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|-------|
| a_3b_1 | a_2b_1 | a_1b_1 | a_0b_1 | |
| HA | FA | FA | HA | |
| p_4 | p_3 | p_2 | p_1 | p_0 |

```

11011 x
 1011 =
-----
11111
11011+
11011-
-----
00000
1010001+
00000- -
-----
11010
1010001+
11011 - - =
-----
100101001 -> 29710

```

Somma dei primi 2 prodotti parziali:
 Aggiunge il terzo prodotto parziale:

HA e FA non sono equivalenti per i diversi cammini critici.



Somma della terza riga



I primi due prodotti parziali sono sommati dalla prima batteria di sommatore.
 Ogni altro prodotto parziale è sommato da un'ulteriore batteria di sommatore.

| | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|-------|
| | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 | |
| | a_3b_0 | a_2b_0 | a_1b_0 | a_0b_0 | b_0 |
| | a_3b_1 | a_2b_1 | a_1b_1 | a_0b_1 | b_1 |
| | a_3b_2 | a_2b_2 | a_1b_2 | a_0b_2 | b_2 |
| | a_3b_3 | a_2b_3 | a_1b_3 | a_0b_3 | b_3 |

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|-------|
| a_3b_1 | a_2b_1 | a_1b_1 | a_0b_1 | |
| HA | FA | FA | HA | |
| a_3b_2 | a_2b_2 | a_1b_2 | a_0b_2 | |
| FA | FA | FA | HA | |
| p_4 | p_3 | p_2 | p_1 | p_0 |

```

11011 x 27 x
 1011 = 11 =
-----
11111
11011+ 27 +
11011- 27 - =
-----
00000 297
1010001+
00000- -
-----
11010
1010001+
11011 - - =
-----
100101001 -> 29710

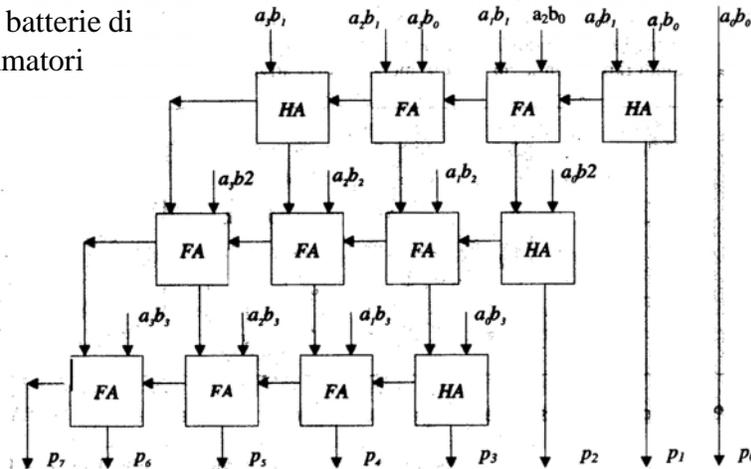
```



Circuito completo della somma dei prodotti parziali



N-1 batterie di sommatori



Problema: overflow: A e B su 32 bit => P su 64 bit.



Valutazione della complessità



Complessità:

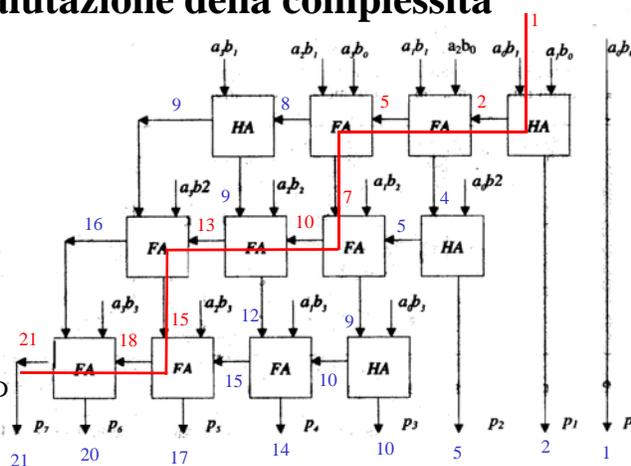
Half Adder: 2 porte
Full Adder: 5 porte

Stadio AND:

A su N bit
B su M bit

N * M porte AND

Stadio OR:



Numero porte se N = M = 4 -> 48

N sommatori per riga

M-1 righe

1° riga

Altre righe (M-2)

Numero porte = $(N-2) * 5 + 2 * 1 + (M-2) * [(N-1) * 5 + 1]$



Valutazione del cammino critico



Cammini critici:

Half Adder:

Somma - 1 porta

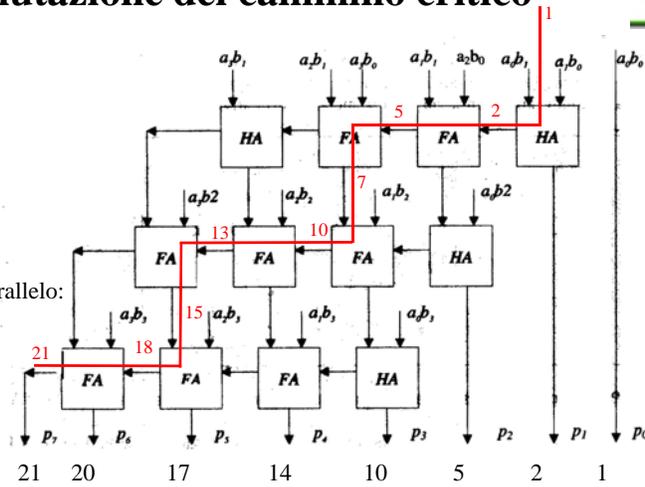
Riporto - 1 porta

Full Adder:

Somma - 2 porte

Riporto - 3 porte

Gli AND operano in parallelo:
ritardo 1.



Cammino critico: 21



Sommario



Addizionatori

Moltiplicatori