



# I circuiti binari: definizione delle funzioni logiche

Prof. Alberto Borghese  
Dipartimento di Scienze dell'Informazione  
[borgnese@dsi.unimi.it](mailto:borgnese@dsi.unimi.it)

Università degli Studi di Milano

Riferimenti al testo: Appendice C, sezioni C.1 e C.2



## Sommario

Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

Algebra Booleana.



## Le operazioni logiche fondamentali



NOT

AND

OR



## Circuiti Booleani



“An Investigation of the Laws of Thought on Which to Found the Mathematical Theories of Logic and Probabilities” G. Boole, 1854: approccio alla logica come algebra.

Variabili (binarie, 0 = FALSE; 1 = TRUE).

Operazioni sulle variabili (NOT, AND, OR).

Equivalenza tra operazioni logiche su proposizioni vere/false e operazioni algebriche su variabili binarie.

### Utilizzo dell'algebra Booleana per:

Analisi dei circuiti. Descrizione della funzione logica implementata dai circuiti.

Semplificazione di espressioni logiche per ottenere implementazioni efficienti.

Progettazione (sintesi) dei circuiti digitali. Data una certa funzione logica, sviluppare il circuito digitale che la implementa.



## Operatore NOT



Tabella della verità

A	Y
0	1
1	0



“Inverter logico” : se **A** è vero (**TRUE=1**),  
**NOT A** è falso (**FALSE=0**)

$$\text{NOT } A = \overline{A}$$

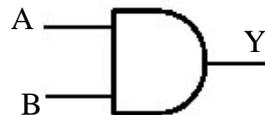


## Operatore AND



Tabella della verità

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



“Prodotto logico”

$$Y = A \text{ AND } B = A \cdot B = AB$$



## Operatore OR



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabella della verità

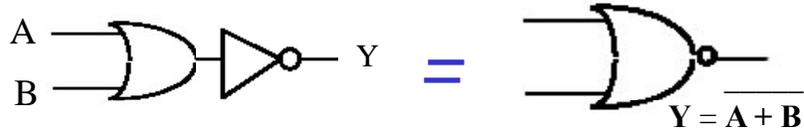


“Somma logica”

$$Y = A \text{ OR } B = A + B$$



## Concatenazione del NOT



Inserire un cerchietto all'ingresso corrisponde a negare la variabile in ingresso.  
Inserire un cerchietto all'uscita corrisponde a negare (complementare) l'uscita.

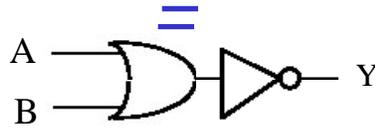
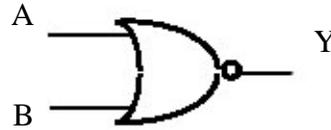


## Operatore NOR



A	B	OR(A,B)	Y
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Operatore OR negato



“Not(Or(A,B))”

$$Y = \overline{A + B}$$

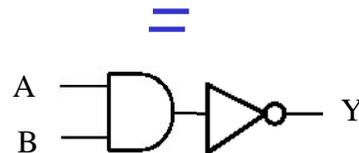
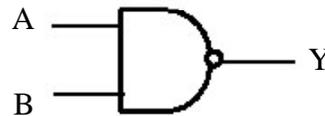


## Operatore NAND



A	B	AND(A,B)	Y
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Operatore AND negato



“Not(And(A,B))”



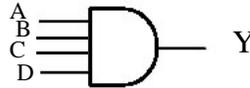
## Porte logiche a più ingressi



- Rappresentano circuiti che forniscono in uscita il risultato di operazioni logiche elementari sui valori di tutte le variabili in ingresso
- Le variabili in ingresso possono essere n.

Ad esempio:

$$Y = A \text{ AND } B \text{ AND } C \text{ AND } D$$

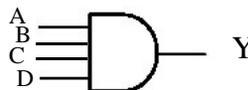


## Porte logiche: tabella della verità



A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$Y = A \text{ AND } B \text{ AND } C \text{ AND } D$$





## Sommario



Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

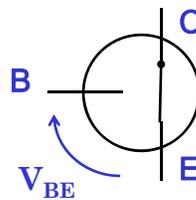
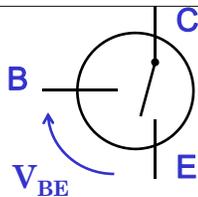
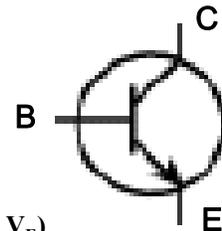
Algebra Booleana.



## Il Transistor

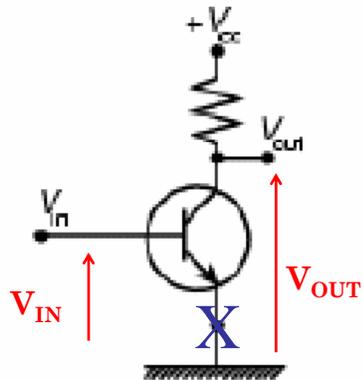


- Modello: interruttore tra **Emettitore** e **Collettore**, comandato dalla tensione sulla **Base**.
- 2 casi “estremi”:
  - Tensione  $V_{BE}$  **bassa**  $\rightarrow$  **C,E isolati**
    - Transistor in stato di **INTERDIZIONE**
  - Tensione  $V_{BE}$  **alta**  $\rightarrow$  **C,E collegati**
    - Transistor in stato di **SATURAZIONE** ( $V_C = V_E$ )





## Inverter logico: porta NOT



$V_{in} = 0V$  è spento,  $V_{out} = V_{CC}$

$V_{in} = V_{CC}$  passa corrente, la resistenza è molto bassa e  $V_{out} \cong 0$

Si definisce porta logica (**gate**), un dispositivo elettronico in grado di trasformare la tensione agli ingressi secondo gli operatori fondamentali.



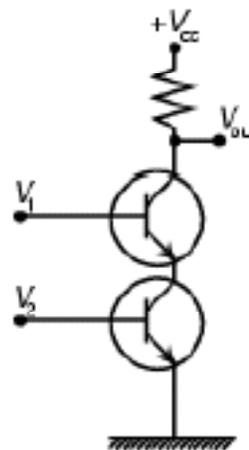
## Porta NAND



- Solo se  $V_1=V_2=V_H$  → I due transistor sono chiusi e passa corrente,  $V_{OUT} = V_L$
- Altrimenti →  $V_{OUT} = V_H$

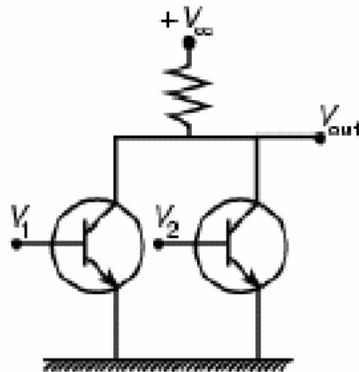
Tabella della verità

$V_1$	$V_2$	$V_{OUT}$
$V_H=1$	$V_H=1$	$V_L=0$
$V_H=1$	$V_L=0$	$V_H=1$
$V_L=0$	$V_H=1$	$V_H=1$
$V_L=0$	$V_L=0$	$V_H=1$





## Porta NOR



Se  $V_i$  è alto, il transistor corrispondente, conduce e la tensione  $V_{out}$  si avvicina alla massa ( $V_{out} = \text{Low}$ ).

Se  $V_1 = V_2 = 0$  nessun transistor conduce, e  $V_{out}$  viene "tirata" (pull-up) verso la tensione dell'alimentazione.

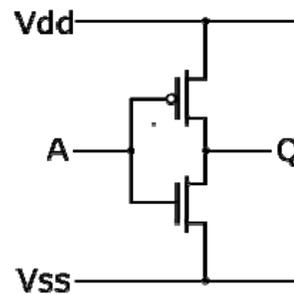
(c)  
NOR



## La tecnologia CMOS (1980 – oggi)

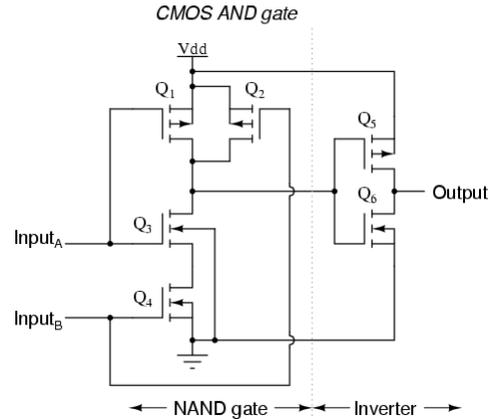
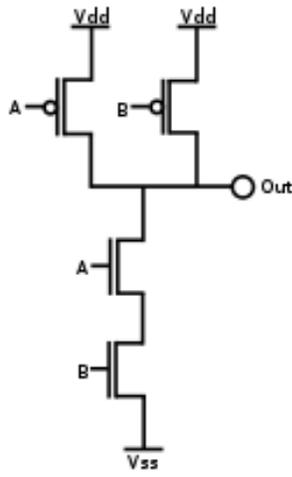


- **CMOS**: Complementary-MOS
  - MOS: **M**etal – **O**xide **S**emiconductor
  - MOS complementari (**N**-MOS + **P**-MOS) che lavorano "in coppia": substrati comuni.
- Vantaggi:
  - Tensione di alimentazione "flessibile":
    - $V_{CC} = 2 \div 15$  Volt
    - $V_{LOW} = 0 \div V_{CC}/2$
    - $V_{HIGH} = V_{CC}/2 \div V_{CC}$
  - Consumo bassissimo:
    - Consuma solo nella transizione
    - In condizioni statiche, consumo praticamente nullo!

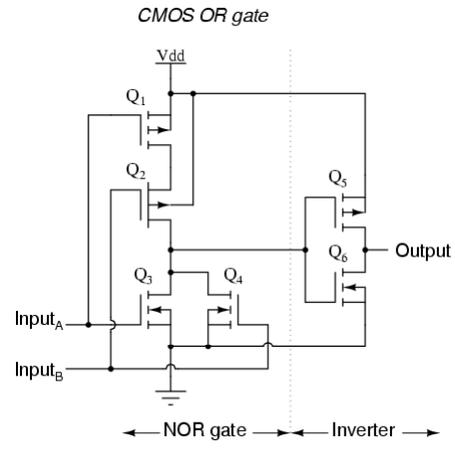
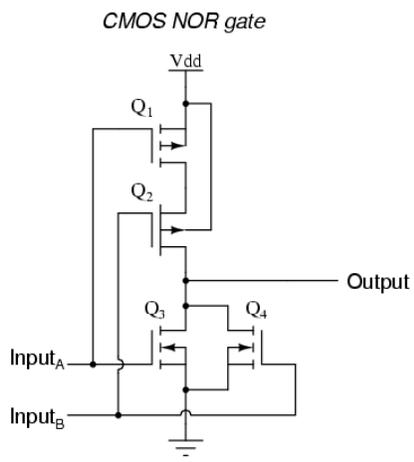




# Porta NAND e AND in C-MOS



# PORTA NOR e OR IN CMOS



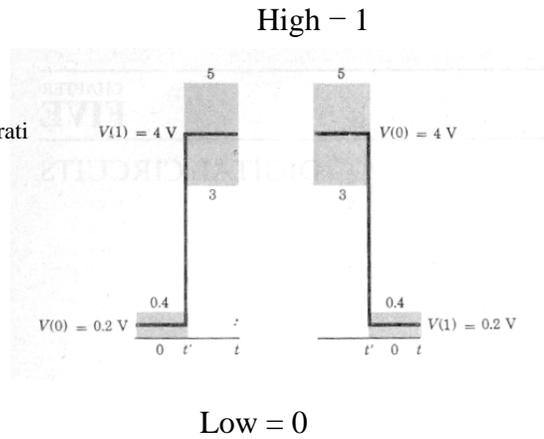


# Perchè l'elettronica digitale funziona?



Perchè è progettata per essere resistente al rumore.

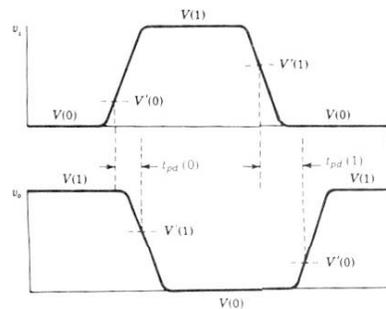
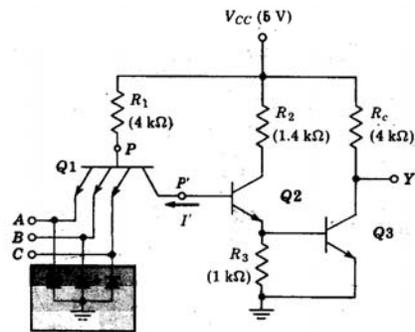
Vengono definiti 2 range di tensioni associati ai valori alto e basso, separati da un gap. Per la logica TTL:



# Tempo di commutazione



La commutazione non è istantanea:



Definizione del cammino critico nei circuiti combinatori.



## Sommario



Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

**Dal circuito alla funzione.**

Algebra Booleana.



## Funzioni logiche



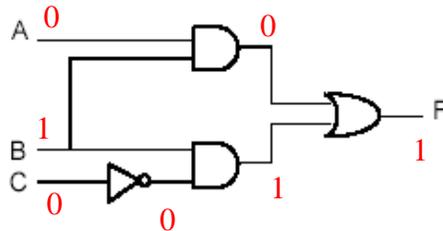
- La funzione calcolata da un circuito con  $n$  ingressi.
- Il circuito sarà costituito da un'opportuna combinazione di porte semplici (NOT, AND, OR).
- Per ciascuna delle  $2^n$  combinazioni degli ingressi, può essere calcolata l'uscita.
- Il valore della funzione può essere rappresentato in 3 modi:
  - Circuito
  - Tabellato: tabelle di verità (Truth Table, TT).
  - Espressione simbolica



## Dal circuito alla funzione logica



$$F = (A \text{ AND } B) \text{ OR } (B \text{ AND NOT}(C))$$



A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



## Dall'espressione logica alla tabella della verità



- Data l'espressione:  $F = (A \text{ AND } B) \text{ OR } (B \text{ AND NOT}(C))$

Ricaviamo la tabella delle verità:

A	B	C	A and B	B and not(C)	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

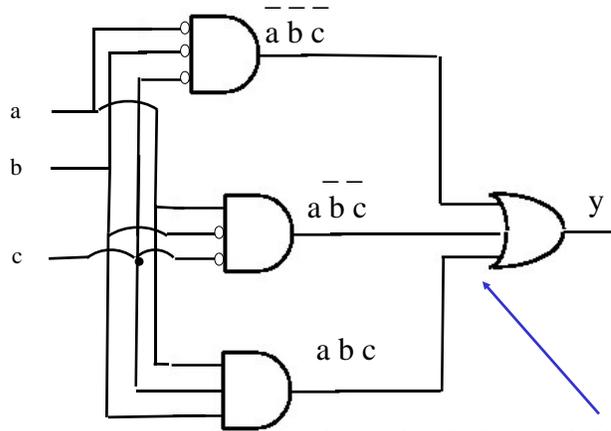


## Dal circuito alla funzione logica



Esempio:

a b c	y
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1



Implementazione circuitale possibile.  
Non è l'unica!

Funzione e tabella  
coincidono

$$y = a \bar{b} \bar{c} + a \bar{b} c + a b \bar{c}$$



## Sommario



Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

**Algebra Booleana.**



## Concatenazione degli operatori



In assenza di parentesi, AND ha la priorità sull'OR ed il NOT su entrambi:

$$A + B \cdot C = A + (B \cdot C)$$

$$\text{NOT } A \cdot C = (\text{NOT}(A)) \cdot C = \bar{A}C$$

In assenza di parentesi, la negazione ha la priorità sugli altri operatori. Anche sulle negazioni esiste una gerarchia:

$$\bar{\bar{A}} \bar{\bar{B}} = (\bar{\bar{A}}) (\bar{\bar{B}}) \quad \bar{\bar{\bar{A}}} \bar{\bar{\bar{B}}} C = [(\bar{\bar{\bar{A}}}) (\bar{\bar{\bar{B}}})] C$$



## Regole algebriche



Doppia Inversione

$$\bar{\bar{x}} = x$$

AND

OR

Identità

$$1 x = x$$

$$0 + x = x$$

Elemento nullo

$$0 x = 0$$

$$1 + x = 1$$

Idempotenza

$$x x = x$$

$$x + x = x$$

Inverso

$$x \bar{x} = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

Commutativa

$$x y = y x$$

$$x + y = y + x$$

Associativa

$$(x y) z = x (y z)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Distributiva

$$x (y + z) = x y + x z$$

$$x + y z = (x + y) (x + z)$$

Assorbimento

$$x (x + y) = x$$

$$x + x y = x$$

De Morgan

$$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{x + y} = \bar{x} \bar{y}$$

Si possono dimostrare sostituendo 0/1 alle variabili.



## Teoremi di De Morgan

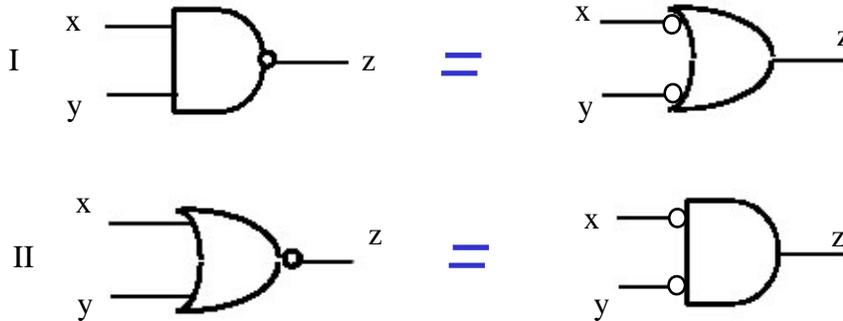


De Morgan

$$\sim (x y) = \sim x + \sim y \quad \sim (x+y) = \sim x \sim y$$

$$\overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$$

$$\overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x} \overline{y}}$$



## Principio di dualità



- Nell'algebra di Boole vale il principio di dualità.
- Il duale di una funzione booleana si ottiene sostituendo AND ad OR, OR ad AND, gli 0 agli 1 e gli 1 agli 0.

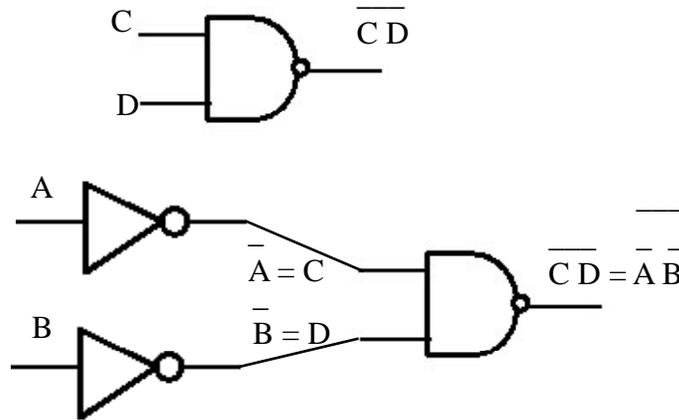
Esempi:

Identità	$1 x = x$	$0 + x = x$
Elemento nullo	$0 x = 0$	$1 + x = 1$

- Le proprietà commutativa, distributiva, identità, inverso sono postulati: assunti veri per definizione.
- Le altre proprietà sono teoremi dimostrabili.



## Verso le porte universali



## Porte Universali



- Quale è il numero minimo di porte con cui è possibile implementare tutte le altre?
- Con la legge di De-Morgan riusciamo a passare da 3 a 2. es.: con NOT e AND (NAND) si ottiene OR:

$$\text{NOT}(\text{NOT}(A)\text{AND}(\text{NOT}(B))) = A \text{ OR } B$$

E' possibile usarne una sola?

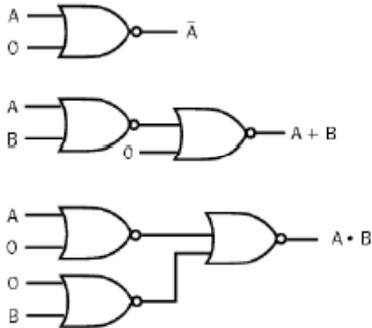
- Sì, ad esempio la porta NAND, o la NOR che sono chiamate **porte universali**.



## Porta Universale NOR



- NOT A = 0 NOR A
- A OR B = (A NOR B) NOR 0
- A AND B = (A NOR 0) NOR (B NOR 0)



## Semplificazioni notevoli



Dimostrare che:  $A + \overline{A}B = A + B$

*Proprietà distributiva di OR rispetto ad AND:*

$$A + \overline{A}B = (A + B)(A + \overline{A})$$

*Sviluppando il prodotto:*

$$(A + B)(A + \overline{A}) = AA + A\overline{A} + BA + B\overline{A} = A + AB + \overline{A}B$$

Raccogliendo A:

$$A + AB + \overline{A}B = A + (A + \overline{A})B = A + B$$

Dimostrare che:  $(A + B)(B + C) = AB + AC + BC$

Dimostrare che:  $\overline{A + AB} = \overline{A} + B$



## Esercizi



Usare la sola porta NAND per realizzare AND, OR e NOT e disegnarne gli schemi logici

- Calcolare le TT per le seguenti funzioni  
 $DA + AC + \sim B$   
 $A + B + C + D$   
 $\sim D \sim ABC + \sim DABC + \sim D \sim AB \sim C + \sim DAB \sim C$
- Trasformare in funzioni equivalenti le seguenti  
 $\sim(ABCD)$   
 $\sim(DA) + \sim(B + \sim C)$



## Esempio di semplificazione algebrica (esercizio)



$$F = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + A \overline{B} \overline{C} + ABC =$$

Raccogliendo  $\overline{B} \overline{C}$ :

$$(\overline{A} + A) \overline{B} \overline{C} + ABC =$$

Proprietà dell'inverso: " $\overline{A} + A = 1$ "

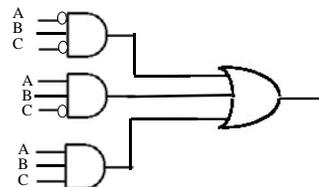
$$= 1 \overline{B} \overline{C} + ABC =$$

Proprietà dell'identità: " $1B = B$ "

$$= \overline{B} \overline{C} + ABC =$$

Dalla slide precedente:

$$= B (\overline{C} + AC) = B(\overline{C} + A)$$





## Esempi di manipolazione algebrica



$$F = !xyv + yz + !y!zv + !xy!v + x!yv =$$

$$F = A !B !C + A B C + A B !C + A !B C =$$

$F = A = ?$  Somma di prodotti di 3 variabili: A, B, C (inverso dell'esercizio precedente):



## Esercizio



Data la funzione booleana:

$$F = (A \text{ AND } B) \text{ OR } (B \text{ AND NOT}(C))$$

Esprimere la funzione F con il solo connettivo logico NOR e disegnare il circuito.

Esprimere la funzione F con il solo connettivo logico NAND e disegnare il circuito.



## Esercizio



Data la funzione booleana:

$$F = (A \text{ AND } B) \text{ OR } (B \text{ AND NOT}(C))$$

Esprimere la funzione F con il solo connettivo logico NOR e disegnare il circuito.

Esprimere la funzione F con il solo connettivo logico NAND e disegnare il circuito.

Costruire le porte logiche: AND, OR, NOT utilizzando solo la porta NAND.



## Sommario



Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

Algebra Booleana.