



Carry look-ahead Adder & Firmware Multiplier

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borgnese@dsi.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti sul Patterson: B.6 & 3.4



Sommario

Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

I problemi del moltiplicatore firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware

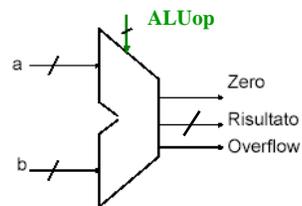


ALU a 32 bit: struttura finale

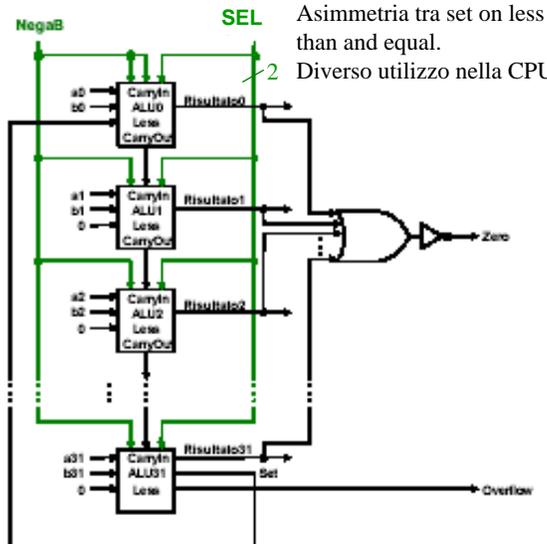


Operazioni possibili:

- AND
- OR
- Somma / Sottrazione
- Comparazione
- Test di uguaglianza



Sono evidenziate solamente le variabili visibili all'esterno.



Asimmetria tra set on less than and equal.
Diverso utilizzo nella CPU



Operazione di somma



$$\begin{array}{r}
 111 \quad \leftarrow \text{Riporto} \\
 1011 + \quad \leftarrow \text{Addendo 1} \\
 110 = \quad \leftarrow \text{Addendo 2} \\
 \hline
 10001
 \end{array}$$

3 Attori: addendo 1, addendo 2, riporto.

Viene eseguita sequenzialmente da dx a sx.

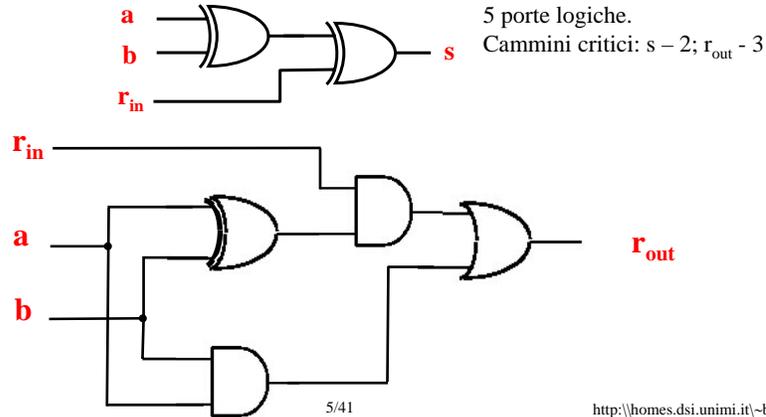


Full adder



$$s = (a \oplus b)\overline{r_{in}} + \overline{(a \oplus b)}r_{in} = (a \oplus b) \oplus r_{in}$$

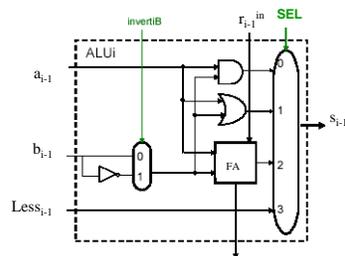
$$r_{out} = ab + (a \oplus b)r_{in}$$



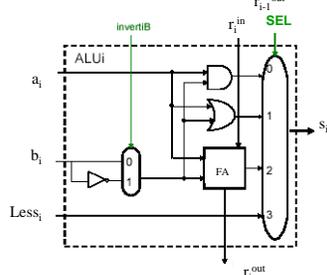
Circuito della somma



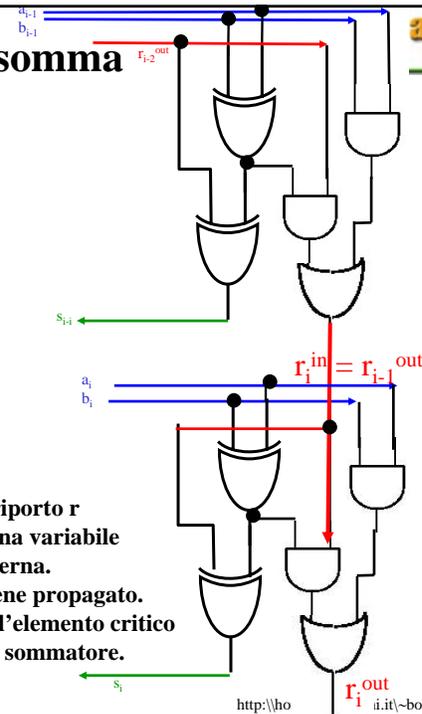
Stadio i-1



Stadio i



Il riporto r
è una variabile
Interna.
Viene propagato.
E' l'elemento critico
del sommatore.





Cammini critici

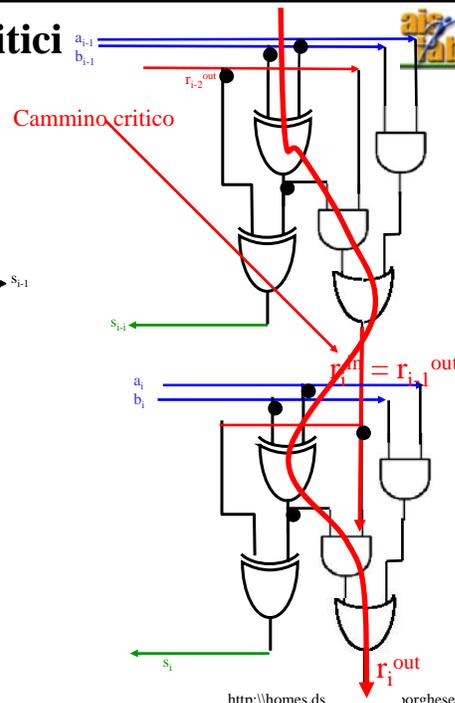
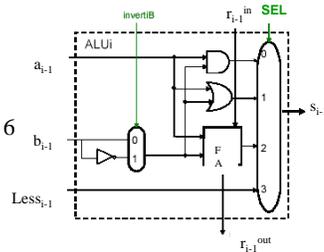
Per ogni stadio:
Somma: 2
Riporto: 3

Per due stadi:
Somma: 2
Riporto: $3 + 3 = 6$

Riporto = $3 * N$

```
111
1011 +
 110 =
-----
10001
```

Funzionamento
sequenziale



I problemi del full-adder



Il full adder con propagazione del riporto è lento:

- Il riporto si propaga sequenzialmente
caratteristica dell'algoritmo di calcolo
- la commutazione dei circuiti non è istantanea (tempo di commutazione)
caratteristica fisica dei dispositivi
- Soluzioni
modificare l'algoritmo
modificare i dispositivi



Sommario



Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

I problemi del moltiplicatore firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware



Prima possibilità: forma tabellare



Riscrivo le equazioni del riporto in modo non sequenziale. Come?

$$r_{out} = f(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

Scrivo la tabella della verità dove in uscita ho gli N riporti ed
In ingresso $2 * N$ valori (gli N bit dei 2 addendi).



Carry look-ahead (anticipazione di riporto)



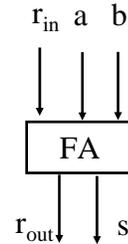
Approccio strutturato per diminuire la latenza della somma.

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

Analisi del singolo stadio.

Quando si genera un riporto in uscita?

Quando ho almeno due 1, in ingresso;
cioè tra r_{in} , a e b .



$$\begin{array}{r}
 11000 \text{ riporto} \\
 1101 + \\
 100 = \\
 \hline
 10001
 \end{array}$$



Propagazione e generazione

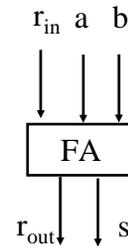


Ho riporto quando ho almeno due 1, in ingresso; cioè tra r_{in} , a e b .

Osservazioni:

- Viene generato un riporto dallo stadio i , qualsiasi sia il riporto in ingresso se $a = b = 1 \Rightarrow g_i = a_i b_i$.
- Viene generato un riporto allo stadio i , se il riporto in ingresso è $= 1$ ed una delle due variabili in ingresso è $= 1 \Rightarrow$ se $p_i = (a_i \oplus b_i) \Rightarrow$ viene generato riporto se $p_i r_i^{in} = 1$ (p_i propaga il segnale di riporto r_i^{in}).

Quando sia la condizione 1) che la condizione 2) è verificata?
Cosa succede se entrambe le condizioni sono verificate?





Esempio



Sono interessato ad r_4^{out} . Supponiamo $r_0^{in} = 0$.

$\begin{array}{r} r_{in} \ 0000000 \\ a \ 10101101+ \\ b \ \quad 10000= \\ \hline 10111111 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0111000 \\ 10101101+ \\ \quad 11010= \\ \hline 11100111 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0111000 \\ 10111101+ \\ \quad 11000= \\ \hline 11010101 \end{array}$
---	--	--

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 0$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

Per propagazione

Per generazione

$$p_4 = (a_4 \oplus b_4) r_4^{in}$$

$$g_4 = a_4 b_4$$



Sviluppo della funzione logica riporto



$$r_i^{out} = ab + (a \oplus b) r_i^{in}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \swarrow \\ r_i^{out} = g_i + p_i r_i^{in} \end{array}$$

$$r_0^{out} = g_0 + p_0 r_0^{in}$$

$$r_1^{out} = g_1 + p_1 r_1^{in} = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0^{in}$$

$$\begin{array}{r} r_1^{out} \swarrow 111 \\ 1001 + \\ \quad 10 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r_1^{in} \swarrow 110 \\ 1001 + \\ \quad 11 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r_1^{out} \swarrow 10 \\ 1010 + \\ \quad 11 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$g_0 = 0$$

$$p_0 = p_1 = 1$$

$$g_0 = 1$$

$$p_1 = 1$$

$$g_1 = 1$$



Sviluppo della funzione logica riporto



$$r_i^{\text{out}} = ab + (a \oplus b) r_i^{\text{in}}$$

$$r_i^{\text{out}} = g_i + p_i r_i^{\text{in}}$$

$$r_0 = g_0 + p_0 r_0$$

$$r_1 = g_1 + p_1 r_0 = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0$$

$$r_2 = g_2 + p_2 r_1 = g_2 + p_2 (g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0) = g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0$$

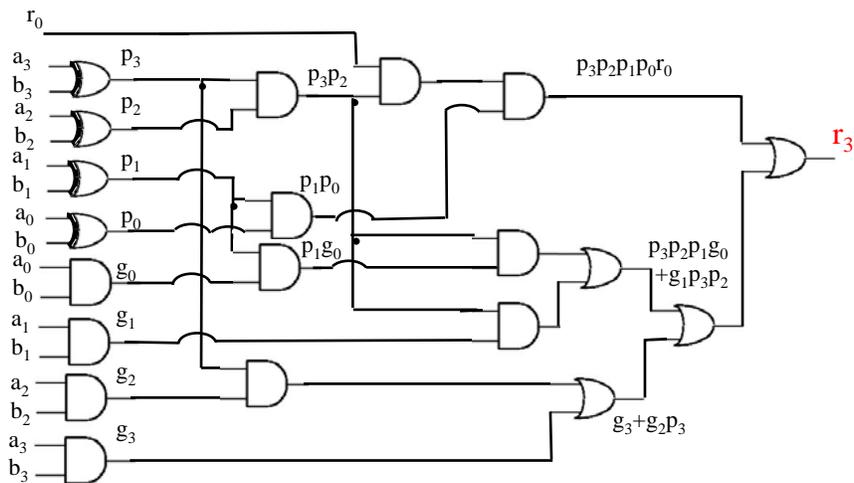
$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3 (g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Determinazione del cammino critico.



$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3 (g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Cammino critico = 6, senza anticipazione sarebbe $3 * 4 = 12$



Quanto si guadagna con l'anticipazione del riporto?



Cammino critico per le variabili interne:

$$r_2^{\text{out}} \Rightarrow 5$$

$$r_1^{\text{out}} \Rightarrow 4$$

$$r_0^{\text{out}} \Rightarrow 3$$

Cammino critico per le variabili esterne:

$$r_3^{\text{out}} \Rightarrow 6$$

$$s_3 \Rightarrow 6 \text{ NB la prima porta XOR è in comune con } r_2^{\text{out}}$$

$$s_2 \Rightarrow 5 \text{ NB la prima porta XOR è in comune con } r_1^{\text{out}}$$

$$s_2 \Rightarrow 4 \text{ NB la prima porta XOR è in comune con } r_0^{\text{out}}$$

$$s_0 \Rightarrow 2$$



Addizionatori modulari



La complessità del circuito è tollerata per piccoli n .

Circuiti sommatore indipendenti si hanno per 4 bit.

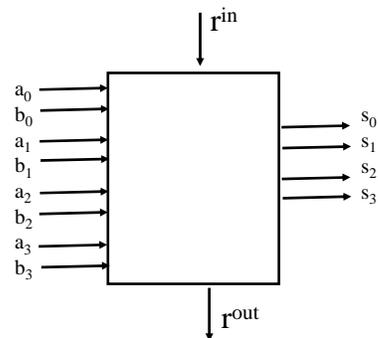
Moduli elementari.

Come si ottiene la somma?

Collegando in cascata i moduli (sommatori elementari).

Cammino critico = $6 * N/4$. Per 32 bit, 48.

Per confronto, senza parallelizzazione, per 32 bit, $N * 3 = 96$.



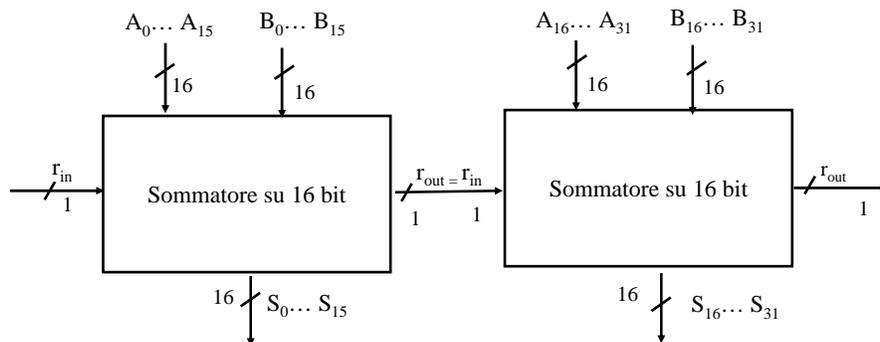


Addizionatori modulari::esempio



Occorre sommare 2 variabili, A e B, su $N = 32$ bit
Ho a disposizione due sommatore su 16 bit.

Come si ottiene la somma?



Sommario



Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

I problemi del moltiplicatore firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware



Shift (scalamento)

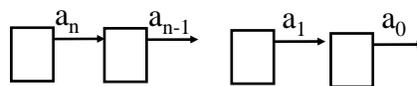


Dato A su 32 bit: $a_j = a_{j-k}$ k shift amount ($>$, $=$, $<$ 0).

Effettuato al di fuori delle operazioni selezionate dal Mux della ALU, da un circuito denominato *Barrel shifter*.

Tempo comparabile con quello della somma.

Operazioni codificate in modo specifico nell'ISA.



Shift dx 1



Il bit a_0 si "perde".
Il bit $a_n = 0$.



L'approccio firmware



Nell'approccio firmware, viene inserita nella ALU una unità di controllo e dei registri. L'unità di controllo attiva opportunamente le unità aritmetiche ed il trasferimento da/verso i registri. Approccio "*controllore-datapath*".

Viene inserito un microcalcolatore dentro la ALU.

Il primo microprogramma era presente nell'IBM 360 (1964).



Algoritmi per la moltiplicazione



Il razionale degli algoritmi firmware della moltiplicazione è il seguente.

Si analizzano sequenzialmente i bit del moltiplicatore e:

- 1) Si mette 0 nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore = 0).
- 2) Si mette una copia del moltiplicando nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore è = 1).

$$\begin{array}{r}
 \text{Moltiplicando} \quad 11011 \times \\
 \text{Moltiplicatore} \quad 101 = \\
 \hline
 11011 + \\
 00000 - \\
 11011 - - \\
 \hline
 \text{Prodotto} \quad 10000111
 \end{array}$$



Moltiplicazione utilizzando somma e shift



Utilizzo un registro prodotto da 64 bit, inizializzato a 0.

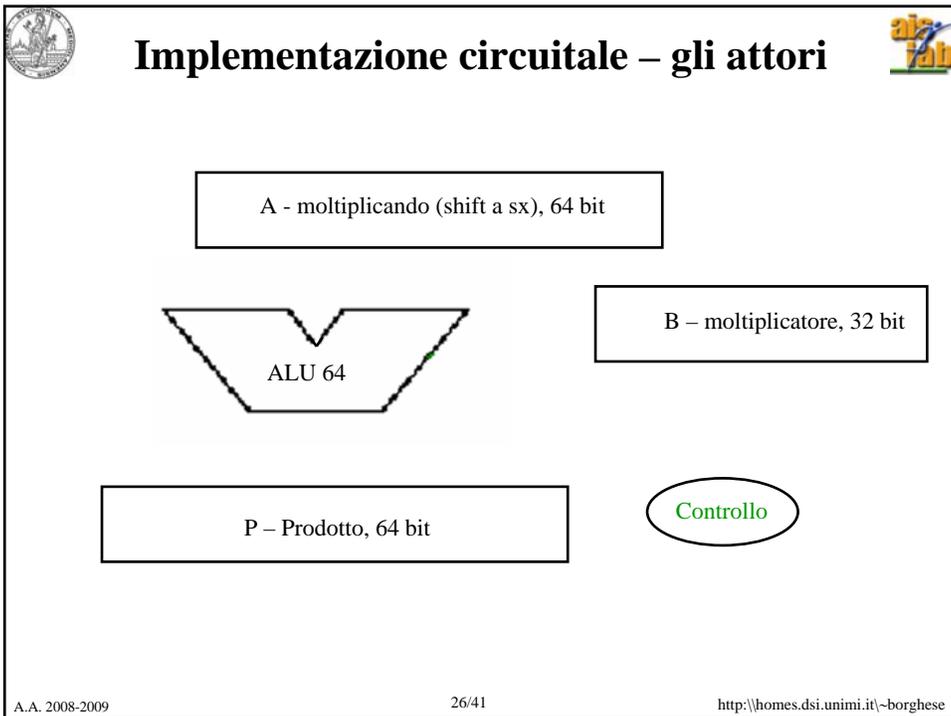
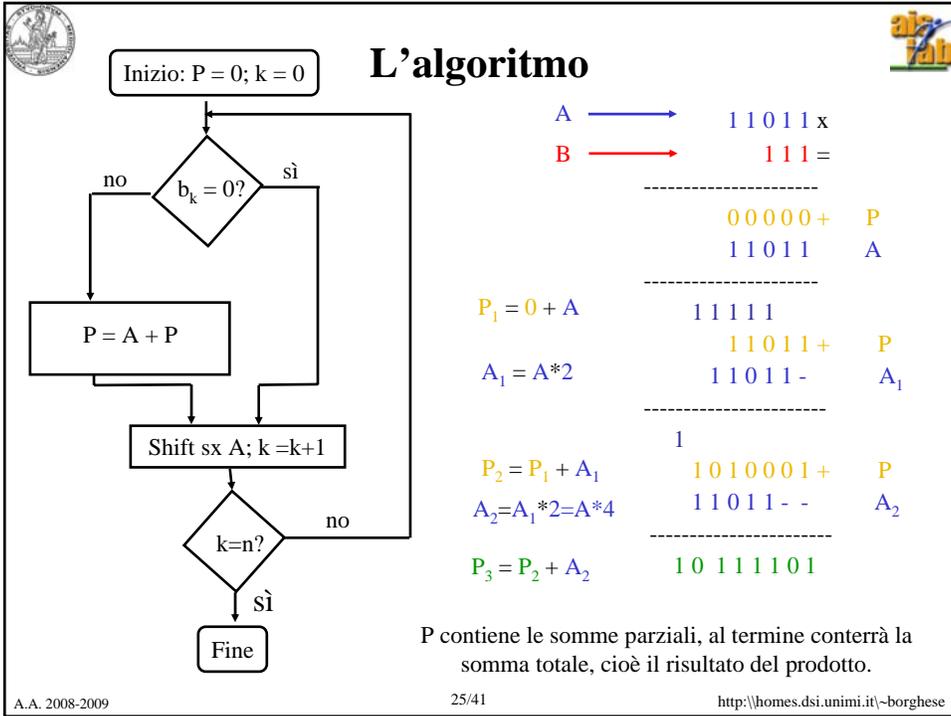
Itero per ogni bit del moltiplicatore:

A) Sommo il moltiplicando al prodotto se il bit = 1.

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando

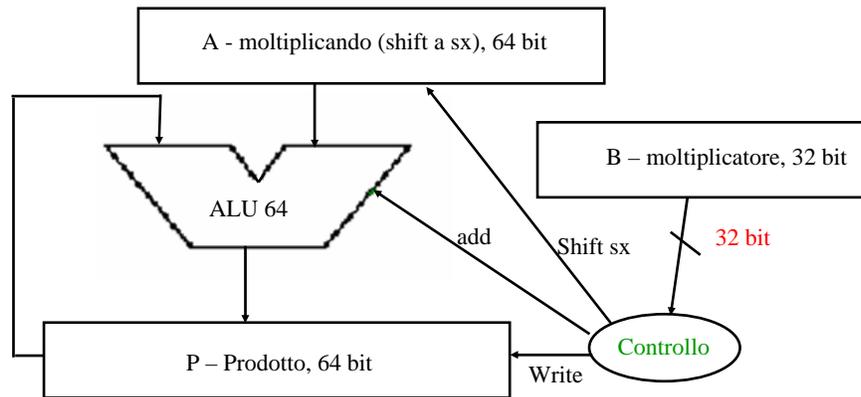
($A' = A * \text{base}$).

$$\begin{array}{r}
 11011 \times \quad A \\
 111 = \quad B \\
 \hline
 00000 + \\
 11011 \\
 \hline
 11111 \\
 11011 + \quad P \\
 11011 - \quad A \\
 \hline
 1 \\
 1010001 + \\
 11011 - - \\
 \hline
 10111101
 \end{array}$$





Implementazione circuitale



Qual'è il problema?



Esercizi



Costruire il circuito HW che esegui la moltiplicazione 7×9 in base 2.

Eseguire la stessa moltiplicazione secondo l'algoritmo visto, indicando passo per passo il contenuto dei 3 componenti: A che contiene il moltiplicando, B che contiene il moltiplicatore e P che contiene somme parziali ed il risultato finale.



Sommario



Problemi dei sommatori

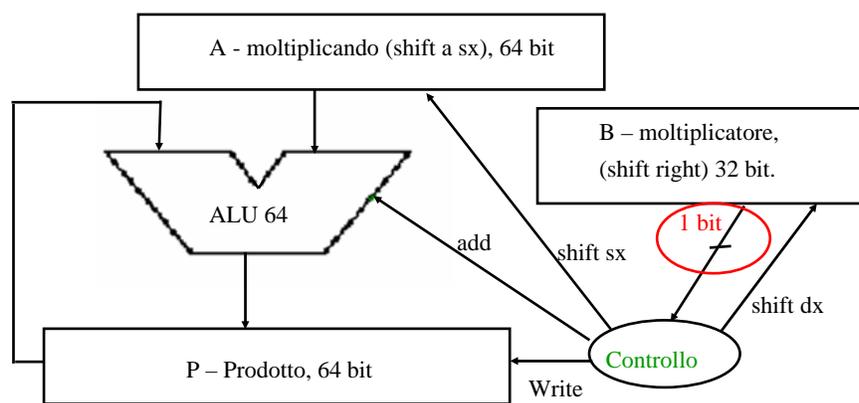
Sommatori ad anticipazione di riporto

I problemi del moltiplicatore firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware



Implementazione circuitale ottimizzata - I





L'algoritmo - I



Inizio; P = 0, k = 0

```

    graph TD
      Start([Inizio; P = 0, k = 0]) --> Dec1{b0 = 0?}
      Dec1 -- sì --> Shift[Shift A a sx, Shift B dx; k=k+1]
      Dec1 -- no --> Add[P = A + P]
      Add --> Shift
      Shift --> Dec2{k=n?}
      Dec2 -- sì --> End([Fine])
      Dec2 -- no --> Dec1
  
```

$A \rightarrow 11011_x$
 $B \rightarrow 111 =$

```

-----
          00000+  P
          11011  A
-----
          11111
          11011+  P
          11011-  A¹
-----
          1
          1010001+  P
          11011- -  A²
-----
P → 10111101
  
```

A.A. 2008-2009

31/41

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Esempio - I



Iterazione	Passo	Moltiplicatore	Moltiplicando	Prodotto
0	Valori iniziali	0010	0000 0010	0000 0000
1	1a: 1 ⇒ Prod = Prod + Mcando	0011	0000 0010	0000 0010
	2: Scala a sinistra Moltiplicando	0011	0000 0100	0000 0010
	3: Scala a destra Moltiplicatore	0000	0000 0100	0000 0110
2	1a: 1 ⇒ Prod = Prod + Mcando	0001	0000 1000	0000 0110
	2: Scala a sinistra Moltiplicando	0001	0000 1000	0000 0110
	3: Scala a destra Moltiplicatore	0000	0000 1000	0000 0110
3	1: 0 ⇒ Nessuna operazione	0000	0000 1000	0000 0110
	2: Scala a sinistra Moltiplicando	0000	0001 0000	0000 0110
	3: Scala a destra Moltiplicatore	0000	0001 0000	0000 0110
4	1: 0 ⇒ Nessuna operazione	0000	0001 0000	0000 0110
	2: Scala a sinistra Moltiplicando	0000	0010 0000	0000 0110
	3: Scala a destra Moltiplicatore	0000	0010 0000	0000 0110

0010 x Moltiplicazione su 4 bit.
 0011 =

A.A. 2008-2009

32/41

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Razionale per una seconda implementazione



Meta' dei bit del registro moltiplicando vengono utilizzati ad ogni iterazione.

Ad ogni iterazione si aggiunge 1 bit al registro prodotto.

Ad ogni iterazione sommo N cifre (pari al numero di cifre del moltiplicando).

Spostamento della ALU sul registro prodotto.
Oppure
Si sposta la somma dei prodotti parziali verso dx di 1 bit ad ogni iterazione.

$$\begin{array}{r}
 11011x \\
 111= \\
 \hline
 00000+ \quad P \\
 11011 \quad A \\
 \hline
 11111 \\
 11011+ \quad P \\
 11011- \quad A^1 \\
 \hline
 1 \\
 1010001+ \quad P \\
 11011- \quad A^2 \\
 \hline
 10111101
 \end{array}$$



Implementazione ottimizzata - II



1^a implementazione

2^a implementazione

$$\begin{array}{r}
 11011 \\
 11011
 \end{array}$$

Sposto a sx il moltiplicando | Sposto a dx il prodotto
P¹ primo prodotto parziale

$$\begin{array}{r}
 11011 \\
 11011
 \end{array}$$

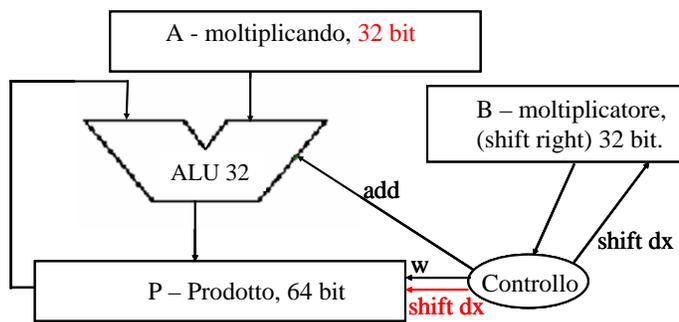
$$\begin{array}{r}
 11011x \\
 111= \\
 \hline
 00000+ \\
 11011
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11111 \\
 11011+ \\
 11011- \\
 \hline
 1 \\
 1010001+ \\
 11011- \\
 \hline
 10111101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11111 \\
 11011+ \\
 11011- \\
 \hline
 1 \\
 1010001+ \\
 11011- \\
 \hline
 10111101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11111 \\
 11011+ \\
 11011- \\
 \hline
 1 \\
 1010001+ \\
 11011- \\
 \hline
 10111101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11111 \\
 11011+ \\
 11011- \\
 \hline
 1 \\
 1010001+ \\
 11011- \\
 \hline
 10111101
 \end{array}$$



Qual'è il problema?

Implementazione ottimizzata - II

1^a implementazione

```

1 1 0 1 1 x
  1 1 0 1 1
-----
1 1 0 1 1
 0 0 0 0 0 +
 1 1 0 1 1
-----
1 1 1 1 1
 1 1 0 1 1 +
 1 1 0 1 1 -
-----
1
1 0 1 0 0 0 1 +
 1 1 0 1 1 - -
-----
1 0 1 1 1 1 0 1

```

2^a implementazione

```

1 1 0 1 1
 1 1 0 1 1
-----

```

Sposto a sx il moltiplicando | Sposto a dx il prodotto
P¹ primo prodotto parziale

A - moltiplicando, 32 bit
B - moltiplicatore, (shift right) 32 bit.
ALU 32
P - Prodotto, 64 bit
Controllo
add
shift dx
w
shift dx
Parte modificabile
Parte non modificabile

A.A. 2008-2009 35/41 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Razionale dell'implementazione - III

Il numero di bit del registro prodotto corrente (somma dei prodotti parziali) più il numero di bit da esaminare nel registro moltiplicando rimane **costante** ad ogni iterazione (pari a 64 bit).

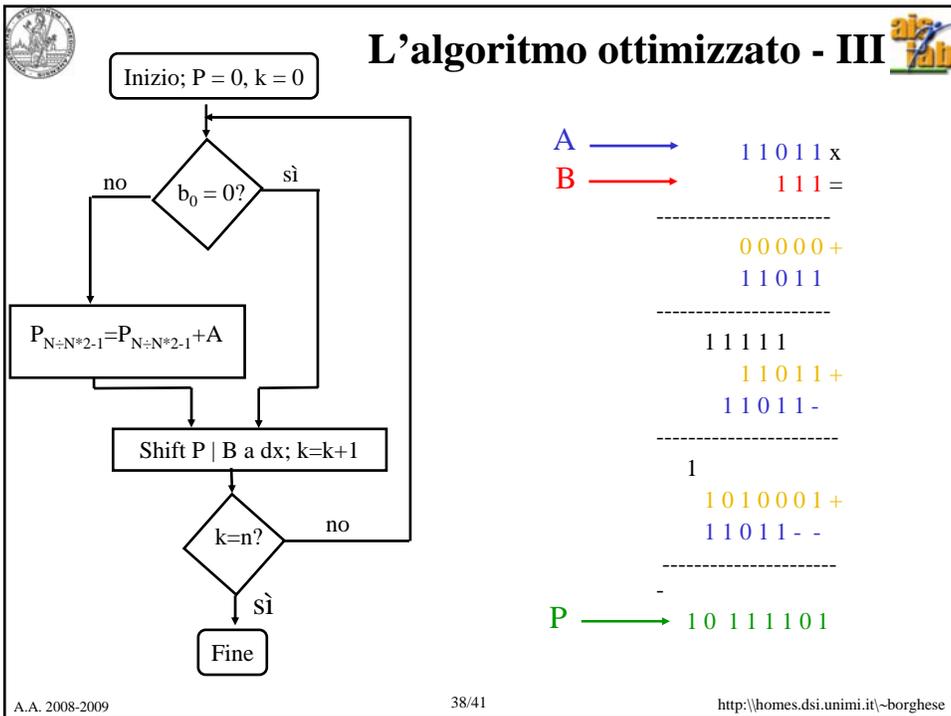
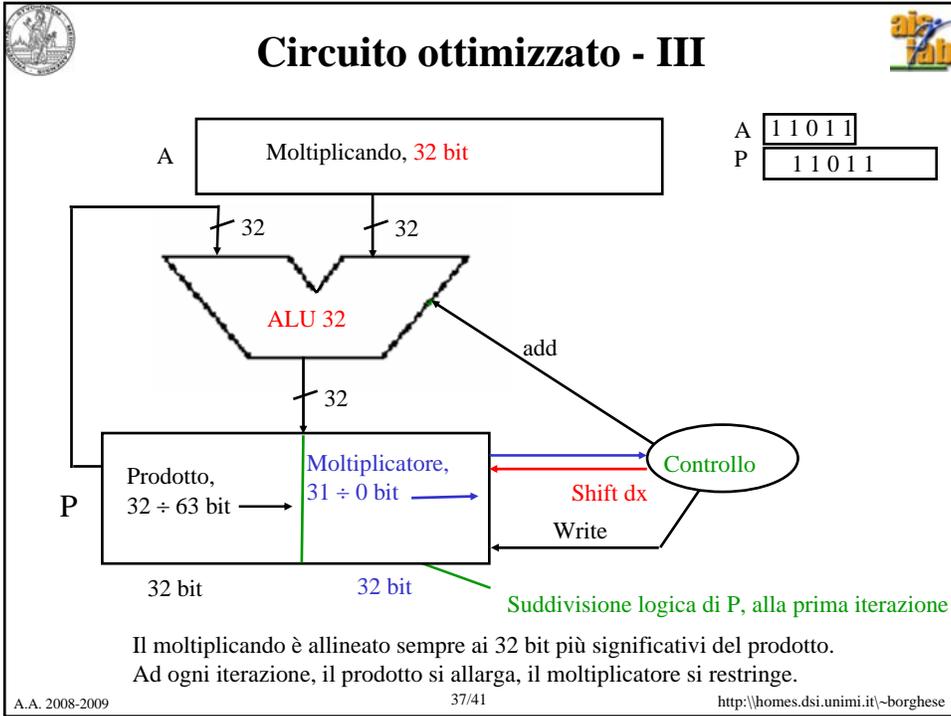
Si può perciò eliminare il registro moltiplicatore.

```

1 1 0 1 1 x
  1 1 1 =
-----
0 0 0 0 0 +
 1 1 0 1 1
-----
1 1 1 1 1
 1 1 0 1 1 +
 1 1 0 1 1 -
-----
1
1 0 1 0 0 0 1 +
 1 1 0 1 1 - -
-----
1 0 1 1 1 1 0 1

```

A.A. 2008-2009 36/41 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese





Esempio di esecuzione dell'algoritmo ottimizzato - III

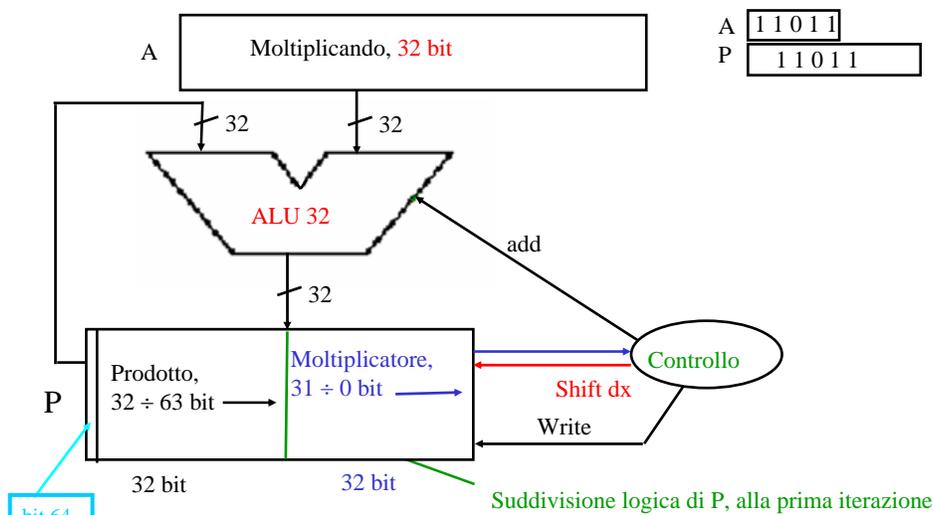


Iterazione	Passo	Moltiplicando	Prodotto
0	Valori iniziali	0010	0000 0010
1	1a: 1 \Rightarrow Prod = Prod + Mcando	0010	0010 0011
	2: Scala a destra Prodotto	0010	0001 0000
2	1a: 1 \Rightarrow Prod = Prod + Mcando	0010	0011 0001
	2: Scala a destra Prodotto	0010	0001 1000
3	1: 0 \Rightarrow Nessuna operazione	0010	0001 1000
	2: Scala a destra Prodotto	0010	0000 1100
4	1: 0 \Rightarrow Nessuna operazione	0010	0000 1100
	2: Scala a destra Prodotto	0010	0000 0110

Il moltiplicando è allineato (e sommato) ai bit più significativi del prodotto.



Circuito finale - il riporto





Sommario



Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

I problemi del moltiplicatore firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware