



# Sommatori e Moltiplicatori

Prof. Alberto Borghese  
Dipartimento di Scienze dell'Informazione  
[borgnese@dsi.unimi.it](mailto:borgnese@dsi.unimi.it)

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: B.5 sul Patterson, per i moltiplicatori HW, capitolo 9 fino a 9.3.3.2 sul Fummi,  
Per gli algoritmi di moltiplicazione: capitolo 3 (fino a 3.4) del Patterson.



## Sommario

Sommatori

Moltiplicatori

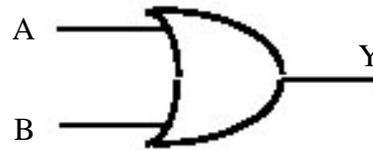


## Somma e prodotto logico



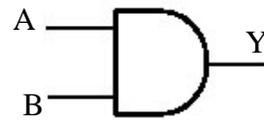
**Somma**  $\Rightarrow$  OR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



**Moltiplicazione**  
 $\Rightarrow$  AND

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



## AND e OR su più bit



1	0	0	1
---	---	---	---

AND

1	1	0	0
---	---	---	---

=

1	0	0	0
---	---	---	---

1	0	0	1
---	---	---	---

OR

1	1	0	0
---	---	---	---

=

1	1	0	1
---	---	---	---

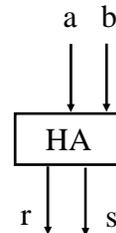


## (Half) Adder ad 1 bit



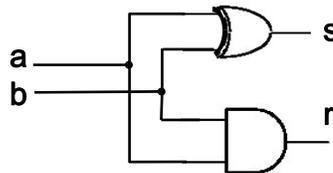
Tabella della verità della somma:

a	b	somma	riporto
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



$$s = a \oplus b$$

$$r = ab$$



La somma è diventata un'operazione logica!

Cammini critici:  
Somma = 1;  
Riporto = 1;

Complessità  
Somma = 1 porta;  
Riporto = 1 porta;



## Full Adder ad 1 bit



Tabella della verità della somma completa:

a	b	$r_{in}$	somma	riporto
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

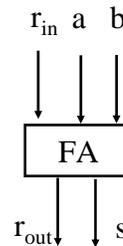
$$s = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

$$r = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$s = \bar{a} \bar{b} r_{in} + a \bar{b} r_{in} + \bar{a} b r_{in} + a b r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) r_{in} + (ab + \bar{a}b) r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) r_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$



$$r_{out} = \bar{a} \bar{b} r_{in} + a \bar{b} r_{in} + \bar{a} b r_{in} + a b r_{in} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

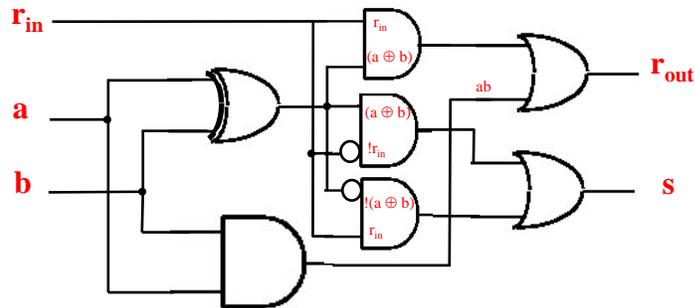


## Implementazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \overline{r_{in}} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



7 porte logiche.  
Cammini critici:  $s \rightarrow 3$ ;  $r_{out} \rightarrow 3$



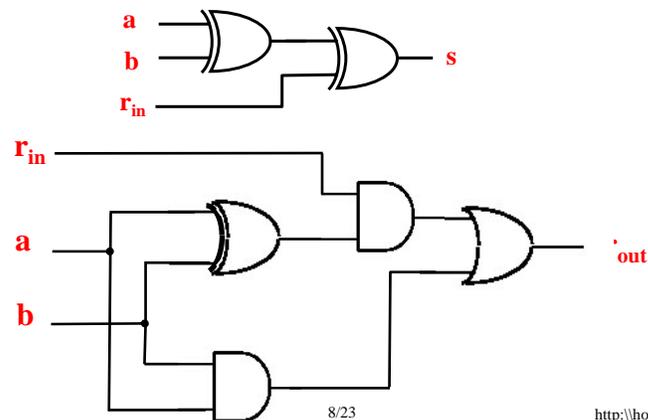
## Semplificazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \overline{r_{in}} + \overline{(a \oplus b)} r_{in} = (a \oplus b) \oplus r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

5 porte logiche.  
Cammini critici:  $s \rightarrow 2$ ;  $r_{out} \rightarrow 3$

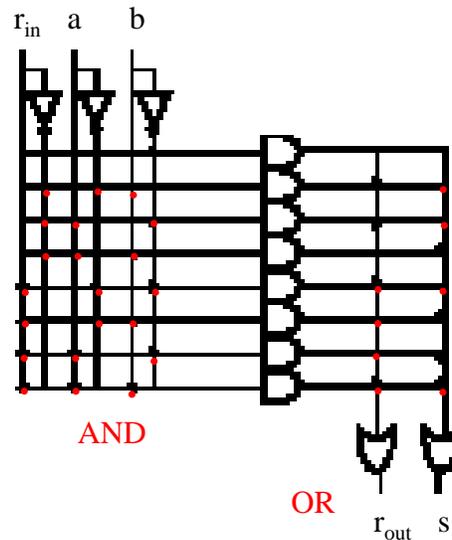




## Implementazione mediante PLA



a	b	$r_{in}$	somma	$r_{out}$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1



SOP: costruisco i mintermini e li sommo.



## Esercizi con ROM e PLA



Implementare il circuito del Full Adder mediante ROM

Scrivere il circuito che esegue la somma di:  $3 + 4$  in base 2.

Riportare tutte le uscite delle porte logiche.

Scrivere il circuito che esegue la seguente sottrazione:  $5 - 2$  in base

2. Riportare tutte le uscite delle porte logiche.



# Sommario



Addizionatori

Moltiplicatori



# Moltiplicazione binaria

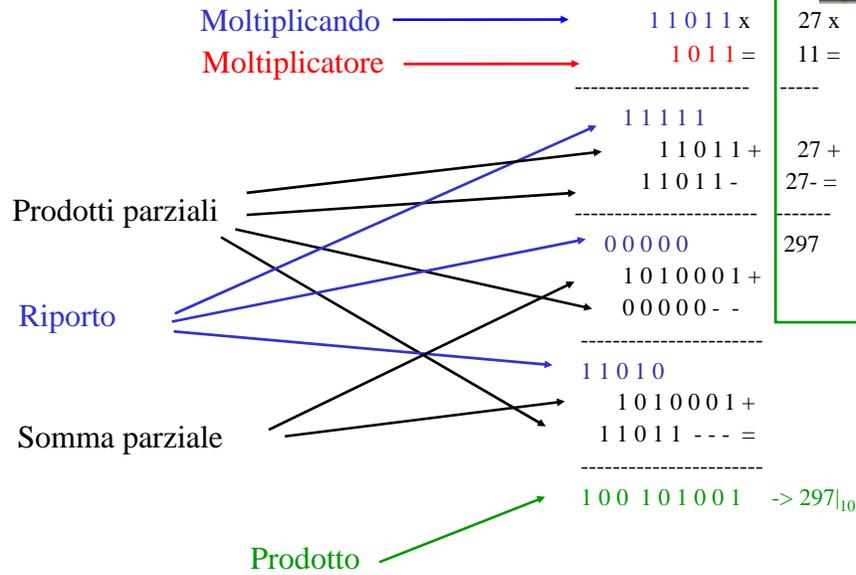


Moltiplicando  $\longrightarrow$  1 1 0 1 1 x  
 Moltiplicatore  $\longrightarrow$  1 1 1 =

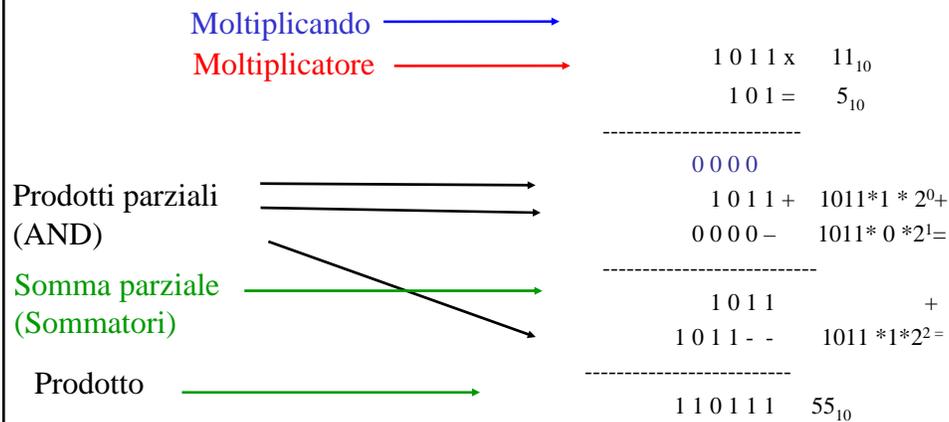
$\begin{array}{r} 11011 \times 27_{10} \\ 111 = 7_{10} \\ \hline 111111 \\ 11011+ \\ 11011- \\ 11011- - \\ \hline 10111101 \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 11111 \\ 11011+ \\ 11011- \\ \hline 1 \\ 1010001+ \\ 11011- - \\ \hline \end{array}$
<p>Prodotto <math>\longrightarrow</math> 1 0 1 1 1 1 0 1</p>	



## Moltiplicazione binaria



## Moltiplicazione binaria (su 4 bit)

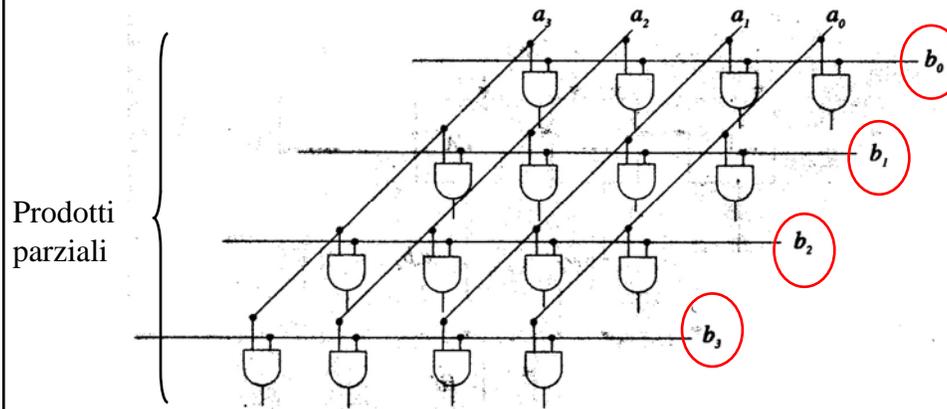


Il prodotto parziale è =  $\begin{cases} \text{Moltiplicando incolonnato opportunamente} \\ 0 \end{cases}$





## Il circuito che effettua i prodotti



## Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali



$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$	
$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$	$b_0$
$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$	$b_1$
$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$	$b_2$
$a_3 b_3$	$a_2 b_3$	$a_1 b_3$	$a_0 b_3$	$b_3$

Somma dei primi 2 prodotti parziali:  
 Aggiunge il terzo prodotto parziale:

```

11011x
 1011 =
-----
11111
11011-
-----
00000
1010001+
00000- -
-----
11010
1010001+
11011 --- =
-----
100101001 -> 29710

```

HA e FA non sono equivalenti  
 per i diversi cammini critici.



## Somma della terza riga



I primi due prodotti parziali sono sommati dalla prima batteria di sommatori.  
Ogni altro prodotto parziale è sommato da un'ulteriore batteria di sommatori.

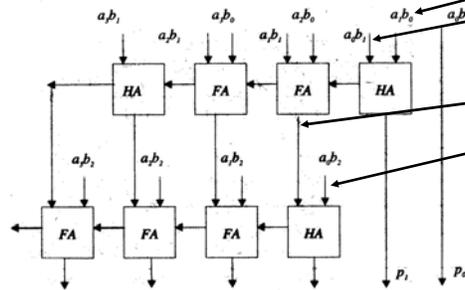
$$\begin{array}{r} 11011 \times 27 \times \\ 1011 = 11 = \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111 \\ 11011 + 27 + \\ 11011 - 27 = \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 00000 \quad 297 \\ 1010001 + \\ 00000 - - \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11010 \\ 1010001 + \\ 11011 - - - = \\ \hline \end{array}$$

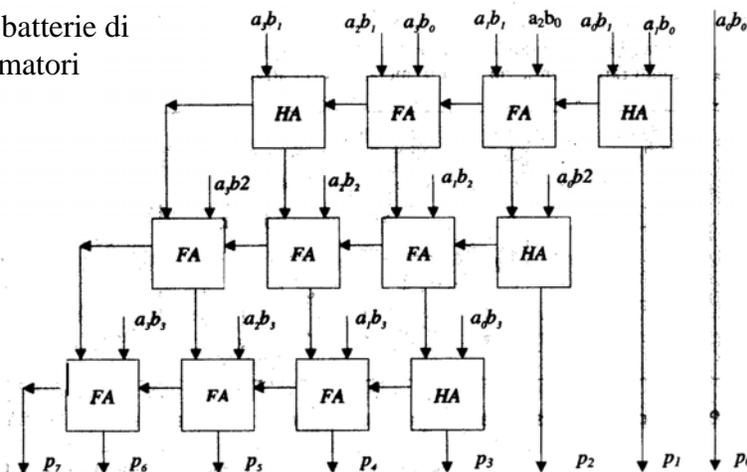
$$100101001 \rightarrow 297_{10}$$



## Circuito completo della somma dei prodotti parziali



N-1 batterie di sommatori



Problema: overflow: A e B su 32 bit => P su 64 bit.



## Valutazione della complessità



### Complessità:

Half Adder: 2 porte  
Full Adder: 5 porte

### Stadio AND:

A su N bit  
B su M bit

N \* M porte AND

### Stadio OR:

N sommatore per riga

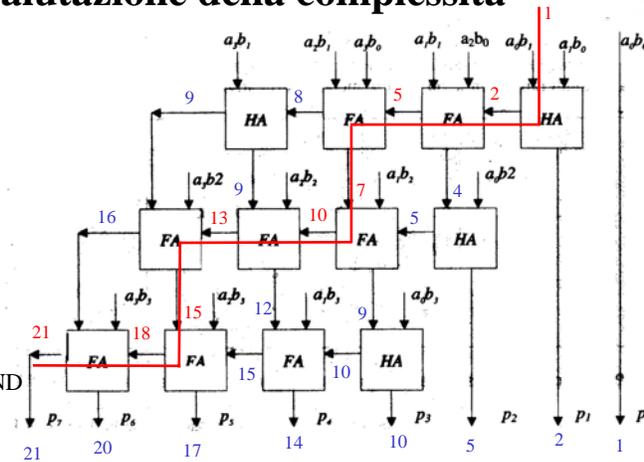
M-1 righe

1° riga

Altre righe (M-2)

Numero porte =  $(N-2) * 5 + 2 * 1 + (M-2) * [(N-1) * 5 + 1]$

Numero porte se N = M = 4 -> 48



## Valutazione del cammino critico



### Cammini critici:

Half Adder:

Somma - 1 porta

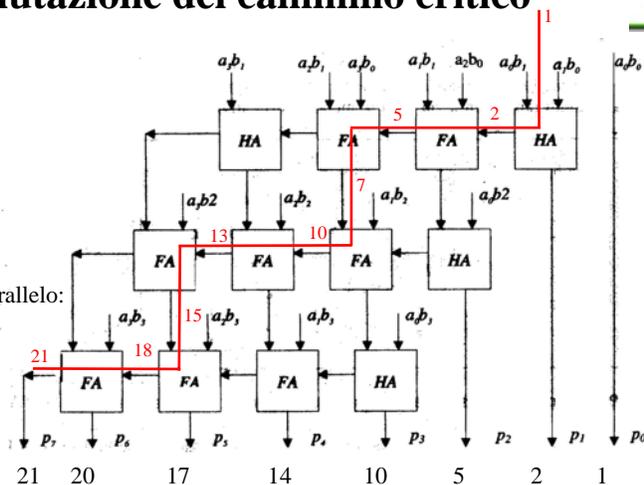
Riporto - 1 porta

Full Adder:

Somma - 2 porte

Riporto - 3 porte

Gli AND operano in parallelo:  
ritardo 1.



Cammino critico: 21



# Sommario



Addizionatori

Moltiplicatori