



Adder & Multiplier

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borgese@dsi.unimi.it

Università degli Studi di Milano



Sommario

Problemi dei sommatore

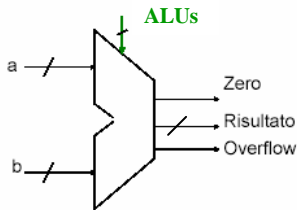
Sommatori ad anticipazione di riporto

Addizionatori modulari

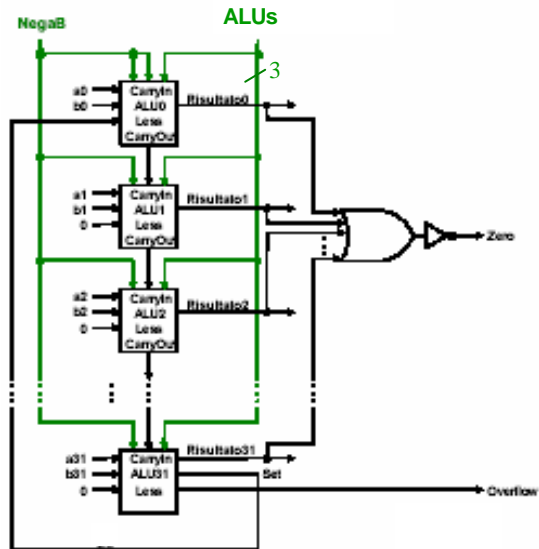
I moltiplicatori



ALU a 32 bit: struttura finale



Qual'è il problema?



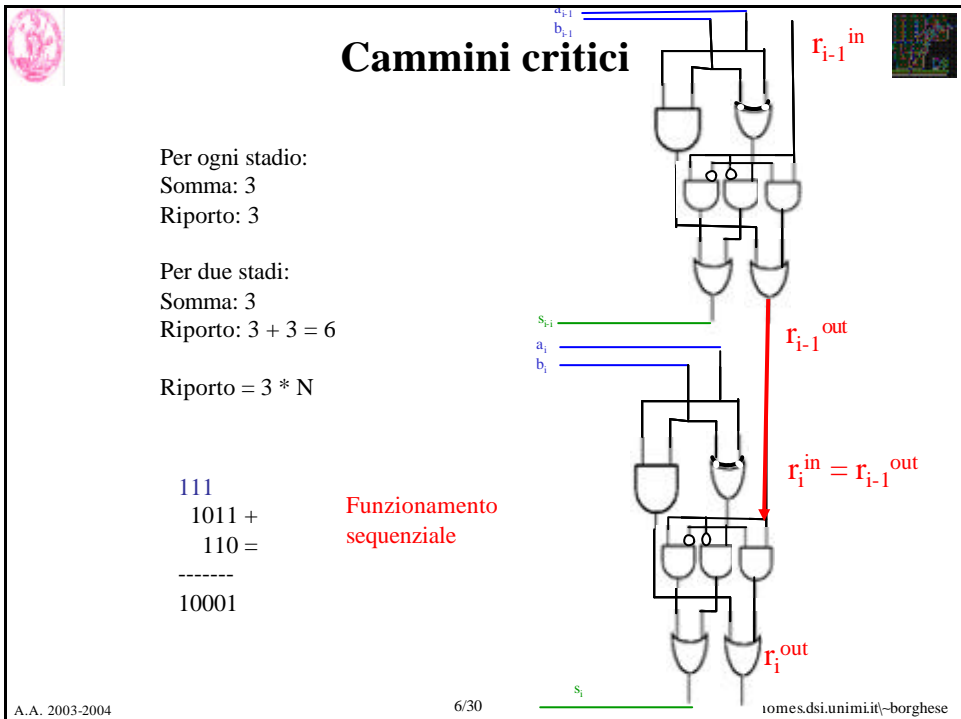
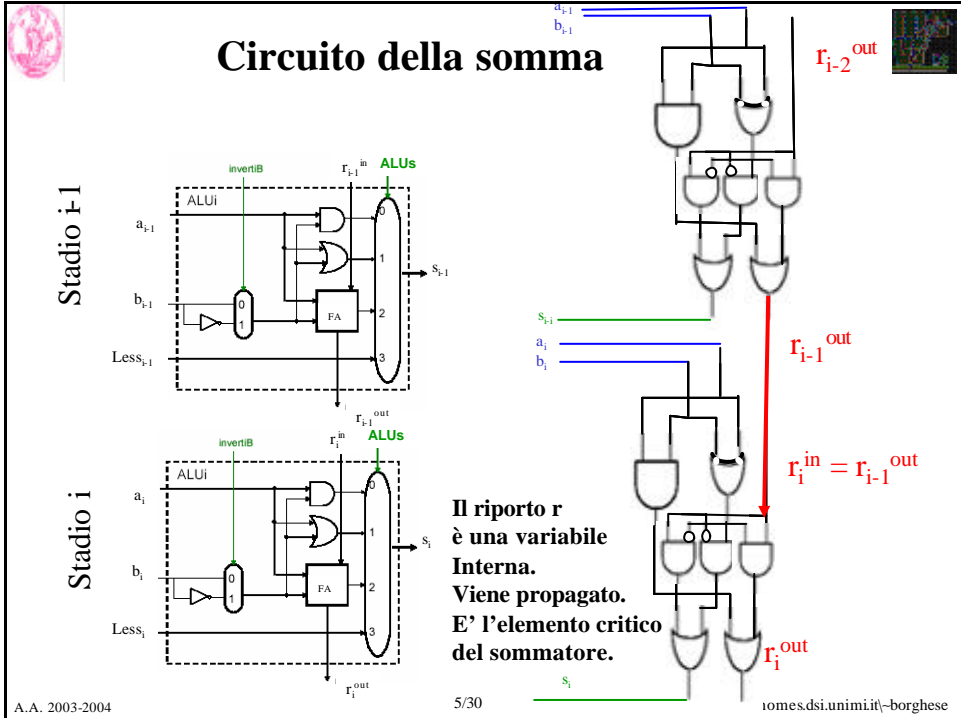
Operazione di somma



$$\begin{array}{r}
 111 \quad \leftarrow \text{Riporto} \\
 1011 + \quad \leftarrow \text{Addendo 1} \\
 110 = \quad \leftarrow \text{Addendo 2} \\
 \hline
 10001
 \end{array}$$

3 Attori: addendo 1, addendo 2, riporto.

Viene eseguita sequenzialmente da dx a sx.





I problemi del full-adder



Il full adder con propagazione del riporto è lento:

- Il riporto si propaga sequenzialmente
caratteristica dell'algoritmo di calcolo
- la commutazione dei circuiti non è istantanea (tempo di commutazione)
caratteristica fisica dei dispositivi
- Soluzioni
modificare l'algoritmo
modificare i dispositivi



Sommario



Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

Addizionatori modulari

I moltiplicatori



Prima possibilità: forma tabellare



Riscrivo le equazioni del riporto in modo non sequenziale. Come?

$$r_0 = a_0b_0 + (a_0 + b_0)r_0 = a_0b_0 + a_0r_0 + b_0r_0$$

$$r_1 = a_1b_1 + (a_1 + b_1)r_0 = a_1b_1 + a_1(a_0b_0 + a_0r_0 + b_0r_0) + b_1(a_0b_0 + a_0r_0 + b_0r_0) = \dots$$

$$r_2 = a_2b_2 + (a_2r_1 + b_2)r_1 = a_2b_2 + a_2(a_1b_1 + a_1r_1 + b_1r_1) + b_2(a_1b_1 + a_1r_1 + b_1r_1) = \dots$$

Molto complesso per n grande.

$$s = (a \oplus b) r_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$
$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$
$$= ab + (a + b) r_{in}$$

Riporto indipendente da r_{in} Riporto funzione di r_{in}

$r_{out} = f(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$

Funzione a $2 * N$ ingressi ed 1 uscita.



Carry look-ahead (anticipazione di riporto)



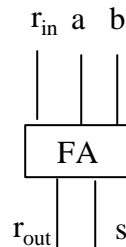
Approccio strutturato per diminuire la latenza della somma.

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

Analisi del singolo stadio.

Quando si genera un riporto in uscita?

Quando ho almeno due 1, in ingresso; cioè tra r_{in} , a e b .



11000 riporto

$$1101 + 100 =$$

$$\text{-----}$$
$$10001$$



Sommario



Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

Addizionatori modulari

I moltiplicatori



Addizionatori modulari



La complessità del circuito è tollerata per piccoli n .

Circuiti sommatore indipendenti si hanno per 4 bit.

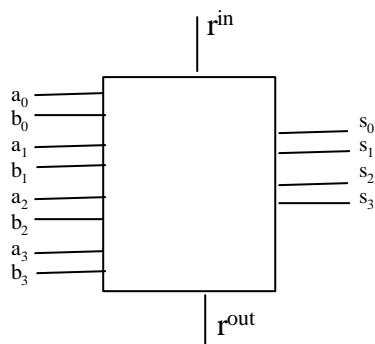
Moduli elementari.

Come si ottiene la somma?

Collegando in cascata i moduli (sommatori elementari).

Cammino critico = $6 * N/4$. Per 32 bit, 48.

Per confronto, senza parallelizzazione, per 32 bit, $N * 3 = 96$.





Struttura degli addizionatori



Come migliorare ulteriormente le prestazioni?

Applicando gli stessi principi utilizzati per il singolo sommatore nell'utilizzo di più sommatori.

Supponiamo di avere 32 bit, occorrono 8 sommatori elementari. Come collegarli tra loro?



Struttura del sommatore semplice



$$P_0 = p_3 p_2 p_1 p_0$$

$$G_0 = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0$$

$$\begin{array}{r} 0100+ \\ 1011= \\ \hline \end{array}$$

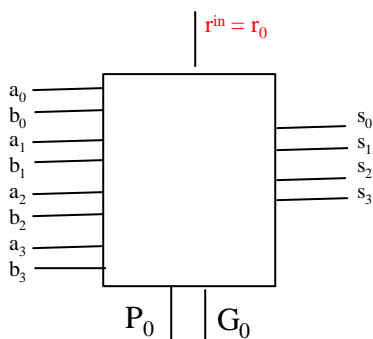
$$P_0 = 1$$

$$\begin{array}{r} 1110+ \\ 1001= \\ \hline \end{array}$$

$$G_0 = 1$$

$$\begin{array}{r} 0110+ \\ 1011= \\ \hline \end{array}$$

$$G_0 = 1$$

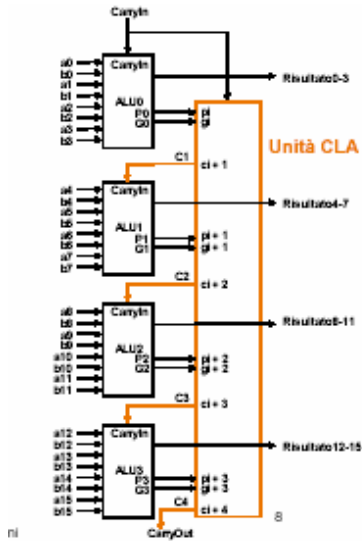


$$r^{out} = G_0 + P_0 r_0$$

$$r^{out} = r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3 (g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Struttura di un sommatore su 16 bit



$$C_1 = G_0 + P_0r_0$$

$$C_2 = G_1 + (P_1G_0) + (P_1P_0r_0)$$

$$C_3 = G_2 + (P_2G_1) + (P_2P_1G_0) + (P_2P_1P_0r_0)$$

$$r_{15}^{out} = C_4 = G_3 + (P_3G_2) + (P_3P_2G_1) + (P_3P_2P_1G_0) + (P_3P_2P_1P_0r_0)$$



Sommario



Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

Addizionatori modulari

I moltiplicatori



Moltiplicazione binaria

$$\begin{array}{r} \text{Moltiplicando} \text{ ---} \quad 11011 \times \\ \text{Moltiplicatore} \text{ ---} \quad 111 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011 \times 27_{10} \\ 111 = 7_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111111 \\ 11011+ \\ 11011- \\ 11011- - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111101 \quad 189_{10} \end{array}$$

$$\text{Prodotto} \text{ ---} \quad 10111101$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 11111 \\ 11011+ \\ 11011- \\ \text{-----} \\ 1 \\ 1010001+ \\ 11011- - \\ \text{-----} \end{array}$$



La moltiplicazione binaria

Possiamo vederla come:

Un primo stadio in cui si mette in AND ciascun bit del moltiplicatore con il moltiplicando.

Un secondo stadio in cui si effettuano le somme (full adder) dei bit sulle righe contenenti i prodotti parziali.



La matrice dei prodotti parziali

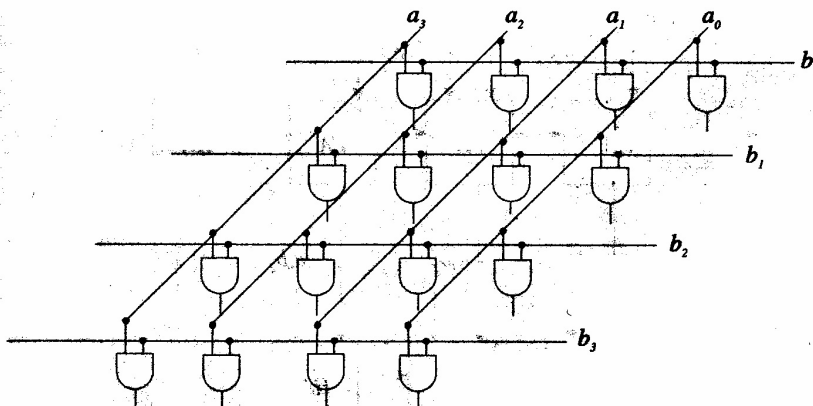


	a_3	a_2	a_1	a_0	
	$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$	b_0
	$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$	b_1
	$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$	b_2
	$a_3 b_3$	$a_2 b_3$	$a_1 b_3$	$a_0 b_3$	b_3

In binario i prodotti parziali sono degli AND.

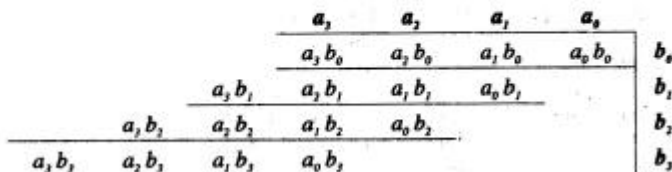


Il circuito che effettua i prodotti





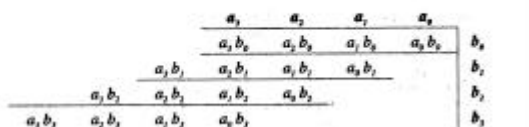
La matrice dei prodotti parziali



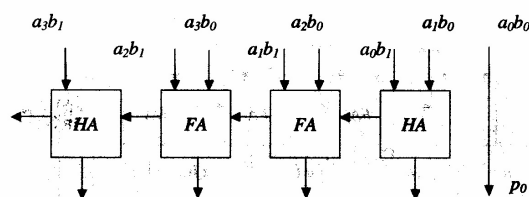
In binario i prodotti parziali sono degli AND.



Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali



$$\begin{array}{r} 11011x \\ 111 = \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 11111 \\ \hline 11011 + \\ \hline 11011 - \\ \hline \end{array}$$

Somma dei primi 2 prodotti parziali:

Aggiunge il terzo prodotto parziale:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1010001 + \\ \hline 11011 - - \\ \hline \end{array}$$

$$\hline 10111101$$

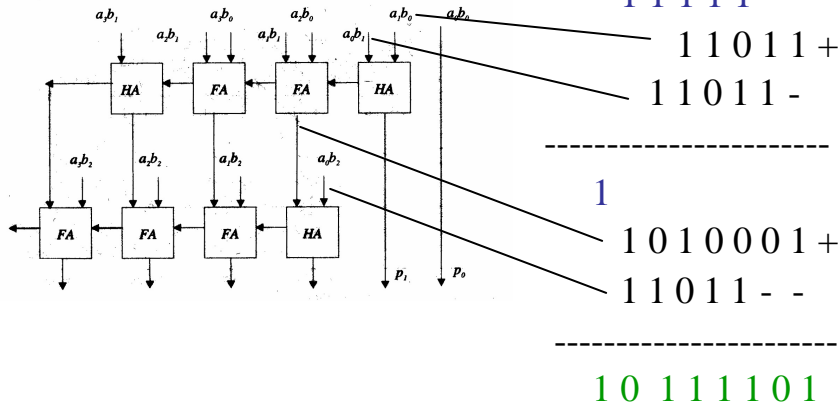


Somma della terza riga



I primi due prodotti parziali sono sommati dalla prima batteria di sommatore.
 Ogni altro prodotto parziale è sommato da un'ulteriore batteria di sommatore.

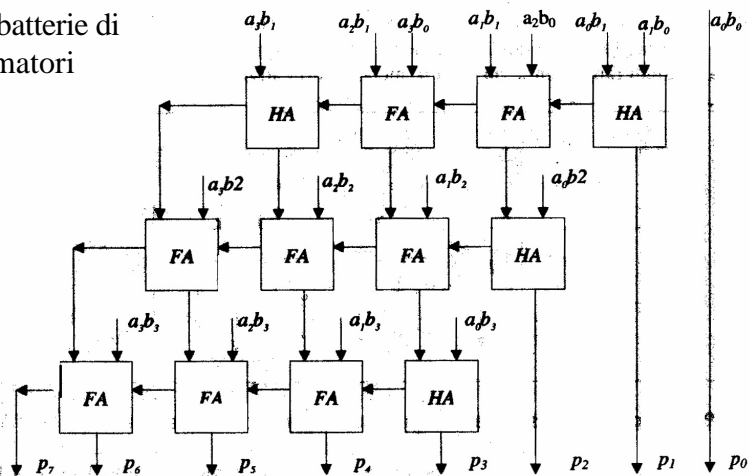
$$\begin{array}{r} 11011x \\ 111= \end{array}$$



Circuito completo della somma dei prodotti parziali



N-1 batterie di sommatore



Problema: overflow: A e B su 32 bit => P su 64 bit.

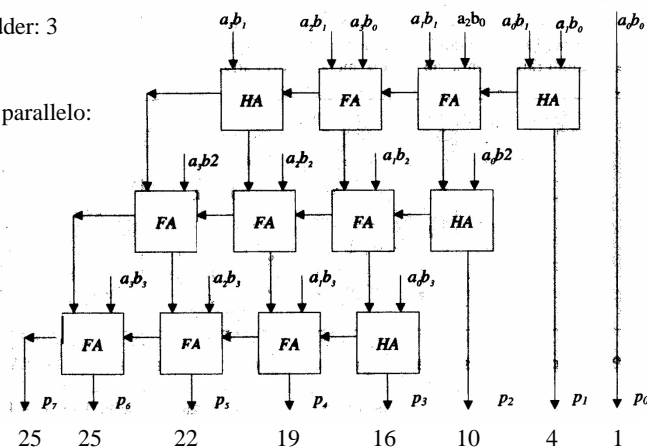


Valutazione del cammino critico



Half Adder e Full Adder: 3
Riporto: 3

Gli AND operano in parallelo:
ritardo 1.



Cammino critico: 25



Sommario



Problemi dei sommatore

Sommatori ad anticipazione di riporto

Addizionatori modulari

I moltiplicatori