(F1X) Teoria dell'Informazione e della Trasmissione

16 – Gestione di portafogli

Docente: *Nicolò Cesa-Bianchi* versione 6 maggio 2014

Come abbiamo visto nello studio della teoria dell'informazione secondo Shannon, la codifica sorgente si occupa dello sviluppo di codici per la compressione di simboli emessi da una sorgente. Nel caso più generale in cui i simboli emessi non siano necessariamente frutto di estrazioni indipendenti e identicamente distribuite (come nel caso da noi studiato), il codice sorgente può adattarsi dinamicamente alle caratteristiche della sequenza di simboli osservati al fine di massimizzarne la compressione. In questa situazione, la capacità di comprimere seguendo l'evoluzione della sequenza può essere resa formalmente equivalente alla capacità di predire i simboli successivi della sequenza dati i simboli passati. A sua volta, una buona strategia di previsione di una sequenza di simboli può essere utilizzata per investire su un insieme di titoli finanziari, dove la sequenza da predire è quella dei valori assunti da ciascun titolo. In altre parole, l'esistenza di un buon codice sorgente dinamico implica l'esistenza di una buona strategia di investimento.

In questa nota analizziamo una di queste strategie di investimento in uno specifico modello di mercato dove l'investimento risulta essere formalmente equivalente alla compressione dinamica. La dimostrazione di questa equivalenza è però relativamente complessa e viene quindi omessa.

Consideriamo l'investimento di un dato capitale (per esempio mille Euro) in Borsa. Per abbattere il rischio, investiamo il capitale frazionandolo su $K > 1$ titoli fissati che denotiamo con gli interi $1, 2, \ldots, K$. Per avvantaggiarci delle fluttuazioni del mercato, ogni giorno decidiamo una nuova suddivisione (fra gli stessi K titoli) del capitale investito.

Denotiamo con $p_1(t), \ldots, p_K(t) \geq 0$ il nostro portafoglio titoli, ovvero le frazioni del capitale che investiamo su ciascun titolo nella t-esima giornata. Chiaramente, $p_1(t) + \cdots + p_K(t) = 1$.

Indichiamo con $x_i(t)$ il rendimento (rapporto fra prezzo di chiusura e prezzo d'apertura) del titolo i nel giorno t. Il rendimento $x_i(t)$ indica quanto vale alla fine del giorno t un Euro investito nel titolo i all'inizio del giorno t.

Per esempio, se investiamo mille Euro il primo giorno sul titolo i, e il rendimento del titolo i nei tre giorni successivi è dato dalla sequenza $x_i(1) = 0.6$, $x_i(2) = 0.8$, $x_i(3) = 2.5$, i nostri mille Euro diventano $1000 \times 0.6 \times 0.8 \times 2.5$, ovvero milleduecento Euro. Si noti che $x_i(t) \geq 0$, dove $x_i(t) = 0$ rappresenta una chiusura del titolo con valore azzerato.

Una strategia di investimento usata in pratica è il ribilanciamento a coefficienti constanti (RCC). Ovvero, viene decisa una suddivisione $p_1, \ldots, p_K$ del capitale iniziale e questa suddivisione viene mantenuta per l'intero arco di tempo considerato. Dato che i rendimenti dei titoli variano nel tempo, per mantenere la suddivisione con le stesse proporzioni iniziali è necessario vendere e acquistare (cioè ribilanciare) al termine di ogni periodo.

Una strategia RCC può dare un profitto molto superiore del rendimento del miglior titolo. Per esempio, supponiamo che $K = 2$ e $x_1(t) = 1$ per $t = 1, 2, \ldots, T$ per il primo titolo (per esempio, il primo titolo rappresenta Euro in assenza di inflazione), mentre $x_2(1) = \frac{1}{2}, x_2(2) = 2, x_2(3) =$

$\frac{1}{2}, x_2(4) = 2, \ldots$ per il secondo titolo. Chiaramente, investendo una qualsiasi somma nei due titoli il primo giorno senza ribilanciare non guadagnamo nulla (anzi, se vendiamo la quota del secondo titolo dopo un giorno dispari, ne perdiamo la metà. D'altra parte, si consideri la strategia RCC con coefficienti $(1/2, 1/2)$. Il profitto di questa strategia è $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ dopo la prima giornata.

Dato che dopo il primo giorno il capitale non è più suddiviso 50%-50% fra i due titoli, esso viene ribilanciato vendendo parte della quota del primo titolo e aumentando la quota del secondo titolo. Questo corrisponde all'intuizione: compra quando è basso e vendi quando è alto. Il profitto del secondo giorno è $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$. Come al termine della prima giornata, anche questa volta il capitale viene ribilanciato per riottenere la suddivisione 50%-50%.

Perciò, il profitto totale dopo due giorni è $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$. È facile vedere che il profitto dopo quattro giorni sarà $(9/8)^2$ e, in generale, dopo T giorni (con T pari) il profitto sarà $(9/8)^{T/2}$. Ovvero, in circa quattro mesi i mille euro diventano un milione, mille volte il nostro capitale iniziale!

In generale, dato un mercato $x_i(1), \ldots, x_i(T)$ con $i = 1, \ldots, K$, il profitto totale dopo t giorni di una strategia RCC $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_K)$ è

$$G_t(\boldsymbol{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{K} p_i \, x_i(t) \right) .$$

Questo, lo ricordiamo, corrisponde al valore di un Euro investito il primo giorno, quindi $G_0(p) = 1$.

Vogliamo ora considerare il profitto della strategia che il giorno t usa il portafoglio $\boldsymbol{p}(t)$, dove

$$\boldsymbol{p}(t) = \frac{\int_\Delta \boldsymbol{p} \, G_{t-1}(\boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{p}}{\int_\Delta G_{t-1}(\boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{p}} \tag{1}$$

e $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (p_1, \ldots, p_K) \, : \, 0 \le p_i \le 1, \, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right\}$ è il simplesso.

Si noti che questa non è una strategia RCC, ma è una strategia dove i coefficienti di ribilanciamento, $\boldsymbol{p}(t)$, cambiano ogni giorno. In particolare, $\boldsymbol{p}(t)$ è una media dei coefficienti $\boldsymbol{p}$ di tutte le strategie RCC pesate dai loro profitti $G_{t-1}(\boldsymbol{p})$.

Un modo per afferrare intuitivamente (1) è pensare che $\boldsymbol{p}(t)$ sia ottenuto estraendo a caso un vettore dal simplesso Δ, dove la probabilità di estrarre un qualsiasi vettore in un intorno di $\boldsymbol{p}$ è proporzionale a $G_{t-1}(\boldsymbol{p})$, ovvero al profitto di $\boldsymbol{p}$ nei primi $t-1$ giorni.

Non è difficile calcolare il profitto dopo T giornate della strategia (1),

$$\begin{aligned} G_T &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{K} p_i(t) x_i(t) \right) \\ &= \prod_{t=1}^{T} \frac{\int_\Delta \left(\sum_{j=1}^{K} p_i x_i(t) \right) G_{t-1}(\boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{p}}{\int_\Delta G_{t-1}(\boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{p}} \\ &= \prod_{t=1}^{T} \frac{\int_\Delta G_t(\boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{p}}{\int_\Delta G_{t-1}(\boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{p}} \, . \end{aligned}$$

Semplificando in modo incrociato i fattori dell'ultima produttoria otteniamo, ricordando che $G_0(\boldsymbol{p}) = 1$,

$$G_T = \frac{\int_\Delta G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \tag{2}$$

dove $\mathrm{Vol}(\Delta)$ è il volume del simplesso. Si noti che il profitto finale G_T della strategia è perciò esprimibile come la media (non pesata) dei profitti delle strategie RCC.

Ora vogliamo confrontare G_T col profitto della migliore strategia RCC (per le sequenze di mercato fissate). Sia $\boldsymbol{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_K^*)$ il portafoglio che massimizza $G_T(\boldsymbol{p})$.

Definiamo ora l'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{T}{T+1}\boldsymbol{p}^* + \frac{1}{T+1}\boldsymbol{q} \,:\, \boldsymbol{q} \in \Delta \right\} = \frac{T}{T+1}\boldsymbol{p}^* + \frac{1}{T+1}\Delta\ . \tag{3}$$

Si noti che ogni punto di $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ è esprimibile come $\boldsymbol{p} = (1-\alpha)\boldsymbol{p}^* + \alpha\,\boldsymbol{q}$ dove $\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q} \in \Delta$ e $0 < \alpha < 1$. Quindi, $\boldsymbol{p} \in \Delta$ e perciò $\mathcal{S} \subseteq \Delta$. Inoltre, per definizione di $\mathcal{S}$, per ogni $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ abbiamo che

$$p_i \ge \frac{T}{T+1} p_i^* \qquad i = 1, \ldots, K\ .$$

Per ogni $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
G_T(\boldsymbol{p}) &= \prod_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{K} p_i x_i(t) \right) \\
&\ge \prod_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{T}{T+1} p_i^* x_i(t) \right) \\
&= \left(\frac{T}{T+1} \right)^T \prod_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{K} p_i^* x_i(t) \\
&= \left(\frac{T}{T+1} \right)^T G_T(p^*)\ .
\end{aligned}$$

Ora, usando la disuguaglianza elementare $1 + x \le e^x$ per $x \in \mathbb{R}$ notiamo che

$$\left(\frac{T+1}{T} \right)^T = \left(1 + \frac{1}{T} \right)^T \le e^{T/T} = e$$

e quindi

$$G_T(\boldsymbol{p}) \ge \frac{1}{e} G_T(\boldsymbol{p}^*)$$

per ogni $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$. Infine, riprendendo (2) e ricordando che $\mathcal{S} \subseteq \Delta$, possiamo osservare che

$$\begin{aligned}
G_T &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \int_\Delta G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} \\
&\ge \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \int_{\mathcal{S}} G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} \\
&\ge \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{e} G_T(\boldsymbol{p}^*)\, d\boldsymbol{p} \\
&= \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{S})}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \frac{1}{e} G_T(\boldsymbol{p}^*)
\end{aligned}$$

Per valutare il rapporto $\mathrm{Vol}(\mathcal{S})\big/\mathrm{Vol}(\Delta)$ si rammenti (3), dove è chiaro che $\mathcal{S}$ è una versione scalata e traslata del simplesso Δ. Dato che siamo in K dimensioni, la scalatura per un fattore $1/(T+1)$ fa diminuire il volume di un fattore $1/(T+1)^K$, mentre la traslazione non influenza il volume. Quindi

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) = \frac{\mathrm{Vol}(\Delta)}{(T+1)^K}$$

Questo termina la dimostrazione del risultato principale, ovvero

$$G_T \geq \frac{G_T(\boldsymbol{p}^*)}{e(T+1)^K}$$

cioè G_T è almeno una frazione polinomiale di $G_T(\boldsymbol{p}^*)$. D'altra parte, abbiamo visto come la miglior RCC, $\boldsymbol{p}^*$, possa guadagnare esponenzialmente nel tempo T. In questi casi, anche la strategia (1) ha la garanzia matematica di guadagnare esponenzialmente, dato che il rapporto fra una funzione esponenziale ed una polinomiale è ancora una funzione esponenziale.