Teoria dell'Informazione e della Trasmissione — Appello dell'11.7.2016

Esercizio A. Siano X_1 e X_2 due variabili casuali identicamente distribuite (ma non necessariamente indipendenti). Si introduca la quantità

$$\rho = 1 - \frac{H(X_2 \mid X_1)}{H(X_1)} \ .$$

1. Si dimostri che $\rho = I(X_1, X_2)/H(X_1)$.
2. Si dimostri che $0 \leq \rho \leq 1$.
3. Sotto quali condizioni ρ assume il valore 0?
4. Sotto quali condizioni ρ assume il valore 1?

Esercizio B. Si consideri la seguente sorgente

$$\langle \mathcal{X}, p \rangle = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Trovare un codice ternario di Huffman per $\langle \mathcal{X}, p \rangle$ e calcolarne la lunghezza media.

Esercizio C. Si calcoli la capacità del seguente canale binario

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "1"] & 0 \\ 1 \arrow[ur, "1/2"] \arrow[r, "1/2"'] & 1 \end{tikzcd}$$

Suggerimento: Si cominci a calcolare l'informazione mutua assegnando $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

Soluzione esercizio A.

Soluzione parte 1.

$$
\begin{aligned}
\rho &= 1 - \frac{H(X_2 \mid X_1)}{H(X_1)} \\
&= \frac{H(X_1) - H(X_2 \mid X_1)}{H(X_1)} \\
&= \frac{H(X_2) - H(X_2 \mid X_1)}{H(X_1)} \qquad \text{dato che } H(X_1) = H(X_2) \text{ perché la distribuzione è uguale} \\
&= \frac{I(X_1, X_2)}{H(X_1)}
\end{aligned}
$$

Soluzione parte 2. Dato che $0 \leq H(X_2 \mid X_1) \leq H(X_2) = H(X_1)$, abbiamo

$$
0 \leq \frac{H(X_2 \mid X_1)}{H(X_1)} \leq 1
$$

il che implica $0 \leq \rho \leq 1$.

Soluzione parte 3. $\rho = 0$ se e solo se $I(X_1, X_2) = 0$ il che si verifica quando X_1 e X_2 sono indipendenti.

Soluzione parte 4. $\rho = 1$ se e solo se $H(X_2 \mid X_1) = 0$ il che si verifica quando $X_2 = f(X_1)$ per una qualche funzione f. Inoltre, dato che X_1 e X_2 hanno la stessa distribuzione, f dev'essere una funzione bijettiva.

Soluzione esercizio B. Un possibile codice di Huffman è

$$
\langle \mathcal{X}, p \rangle = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ 0 & 1 & 20 & 21 & 220 & 221 & 2220 & 2221 \end{pmatrix}
$$

La lunghezza media è $\frac{15}{8}$.

Soluzione esercizio C.

Cominciamo col calcolare l'informazione mutua usando $I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$. Dato che $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \times \frac{1}{2} = \frac{p}{2}$, abbiamo che $H(Y) = H(p/2)$. Inoltre,

$$
H(Y \mid X) = \mathbb{P}(X = 0) \times \underbrace{H(Y \mid X = 0)}_{=0} + \mathbb{P}(X = 1) \times \underbrace{H(Y \mid X = 1)}_{=1} = p \, .
$$

Quindi, $I(X,Y) = H(p/2) - p$. Dato che $H(p/2)$ è concava in p e p è una retta, $H(p/2) - p$ è ancora concava in p. Per cui,

$$
C = \max_{p(x)} I(X,Y) = \max_{p} \big(H(p/2) - p \big) \, .
$$

Facendo la derivata di $F(p) = H(p/2) - p$ trovo

$$
F'(p) = \frac{dF(p)}{dp} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1 - p/2}{p/2} - 1 \, .
$$

Ponendo $F'(p) = 0$ e risolvendo trovo $p = 2/5$ che corrisponde ad una capacità pari a $C = H(1/5) - 2/5$.