FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA (turno unico) Prof. M.Trubian **a.a. 2004/05**
Seconda prova in itinere 23/01/06

Nome studente: .... **Matricola:**......…………......

Esercizio	1	2	3	4	5	6
Punteggio massimo	5	6	5	5	6	6
Valutazione						

[1] E' dato un grafo orientato $G=(N,A)$ con costi c_{ij} e pesi w_{ij} sugli archi, con $c_{ij} \geq 0$ e $w_{ij} \geq 0, \forall$ $(i,j) \in A$. Sono dati una coppia di nodi s, t$\in$ N, un insieme di k coppie di archi $L=\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, con $d_i=\{a_{i1},a_{i2}\}$, a_{i1}, a_{i2} $\in$ A, per i=1,…,k, ed un valore intero non negativo W. Si fornisca un modello di programmazione lineare intera per il problema di determinare in G un cammino da s a t, di lunghezza minima e peso almeno pari a W. Si chiede inoltre che tale cammino contenga al più un arco da ogni coppia in L. Cioè se l'arco a_{i1} fa parte del cammino allora l'arco a_{i2} non ne deve farne parte e viceversa, per i=1,…,k. Inoltre non necessariamente uno degli archi di una coppia deve far parte del cammino.

[2] Partendo dal seguente tableau ottimo di un problema di PL di tipo "min", si aggiunga il taglio di Gomory ricavato dal primo vincolo in ordine lessicografico che lo consente e si riottimizzi.

0	11/3	0	1/3	0	67/3
1	4/3	0	-1/3	0	23/3
0	-1	0	0	1	4
0	2/3	1	1/3	0	7/3

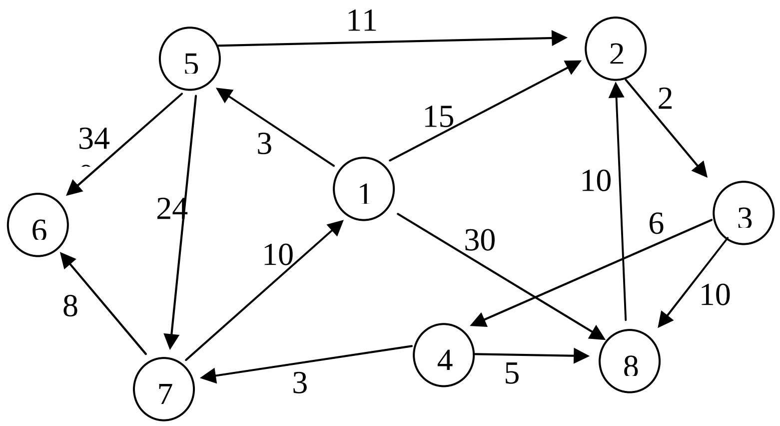
[3] Si risolva mediante un algoritmo di Branch & Bound il problema di zaino definito dai seguenti dati
Profitti, $(p_j) = (9, 8, 6,7,3)$
Pesi, $(w_j) = (2,3,4,5,9)$ Capacità, $b = 12$

Si utilizzi come rilassamento quello lineare, risolto mediante un opportuno algoritmo. Si adotti una strategia "Depth First " e si esplori per primo, ad ogni livello, il ramo dell'albero di "branching" associato al vincolo xi = 1, dove la variabile di branching xi è quella che assume un valore frazionario nel rilassamento lineare.
Si noti inoltre che una variabile libera può venir fissata a zero qualora la capacità ***residua*** dello zaino sia strettamente minore del suo peso.
Come LB si usi la *miglior* soluzione intera data dalla somma dei profitti degli oggetti che è stato possibile inserire nello zaino durante il calcolo dell'UB. Si riporti a fianco l'albero di branching. Per ogni nodo si riportino: il suo numero progressivo, *i* (partendo dal valore 0 del nodo radice), ed il valore UB.

[4] Si formuli il rilassamento lagrangiano del seguente problema di PLI. Il rilassamento mantiene nel modello il vincolo (I) e "rilassa" i vincoli (II) e (III) con moltiplicatori 3 e 4, rispettivamente. Si risolva mediante un semplice ragionamento il problema rilassato.

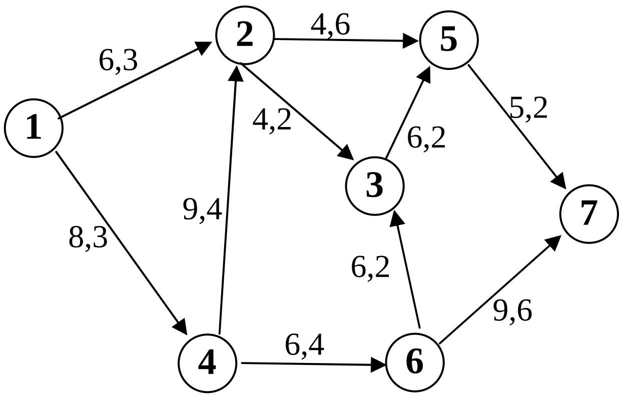
$$
\begin{aligned}
&\max z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\
&(I) \qquad +x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\
&(II) \qquad -4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
&(III) \qquad -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

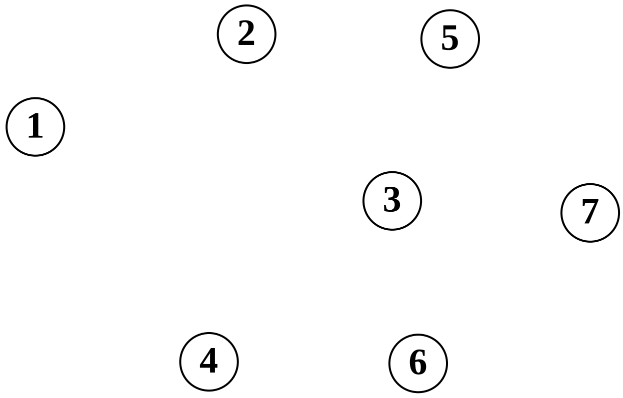
[5] Si risolva mediante l'algoritmo di Dijkstra il problema di determinare i cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi nel grafo in figura



nodi	1	2	3	4	5	6	7	8
Iter. 1								
Iter. 2								
Iter. 3								
Iter. 4								
Iter. 5								
Iter. 6								
Iter. 7								
Iter. 8								

[6] Si risolva mediante l'algoritmo di Ford-Fulkerson il problema di determinare un *flusso di valore massimo* da **1** a **7** nella rete di sinistra in cui i valori sugli gli archi rappresentano la capacità superiore ed il costo unitario, rispettivamente:





6.1 Si riportino tutti i cammini aumentanti come sequenze di nodi ed il corrispondente incremento di flusso.
6.2 Si riporti il valore del flusso massimo e, nella rete di sinistra, il valore del flusso finale lungo ciascun arco.
6.3 Si evidenzi nella rete il *taglio di capacità minima*. Individuato dall'algoritmo di Ford Fulkerson.
6.4 Si determini se il flusso massimo è stato inviato a costo minimo o no, motivando la risposta per mezzo della rete incrementale (da completare) di destra.