FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA Prof. M.Trubian **a.a. 2008/09**

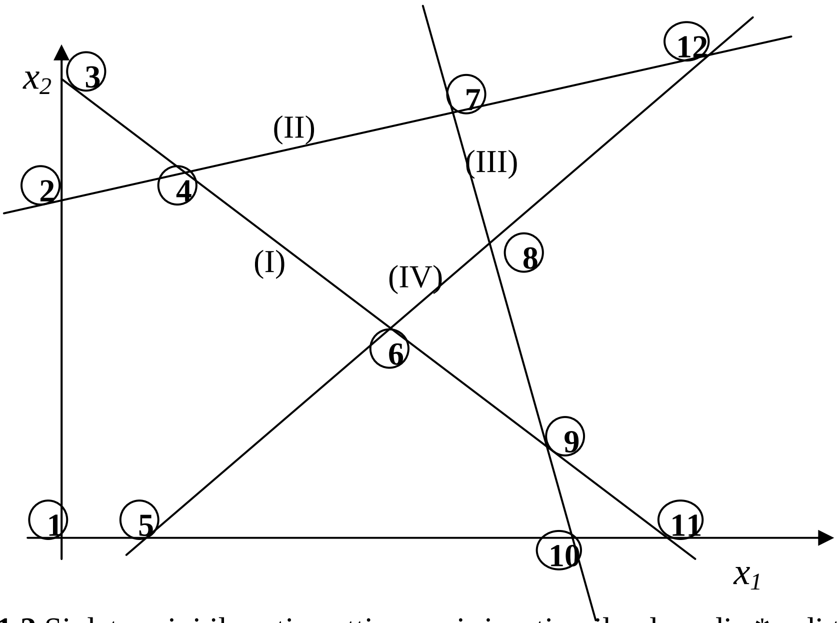
Prima prova in itinere: 25/11/08

A

Nome studente: .... **Matricola:**......……….......

Esercizio	1	2	3	4	5	6
Valore %	0.25	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Valutazione						

[1] In figura sono rappresentati gli iperpiani di supporto della regione ammissibile di un modello di PL: $(I)\quad x_1 + x_2 = 16,\quad (II)\quad -x_1 + 3x_2 = 32,\quad (III)\quad 5x_1 + x_2 = 64,\quad (IV)\quad x_1 - x_2 = 2$. Si dica quale verso (≤, ≥, =) devono avere i relativi vincoli in modo che i vertici della regione ammissibile siano individuati dai punti 6, 8 e 9. Le variabili x_1 e x_2 sono non negative.



1.1

(*I*) verso ___

(*II*) verso ___

(*III*) verso ___

(*IV*) verso ___

1.2 Si determini il vertice ottimo e si riportino il valore di z^* e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto o surplus, in corrispondenza della soluzione ottima se la funzione obiettivo è $\max\ z = x_1 - 2x_2$

z^*______ x_1______ x_2______ x_3______ x_4______ x_5______ x_6

1.3 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di b_2 (ora pari a 32) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ ≤ b_2 ≤ __________

1.4 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di c_2 (ora pari a -2) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ ≤ c_2 ≤ __________

[2] Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema **[1]**.

[3] Una ditta chimica produce, fra gli altri, due prodotti P_1 e P_2 miscelando tre ingredienti,

Le percentuali degli ingredienti nei prodotti sono vincolate come in tabella (ad es. nel prodotto P_1 si richiede una presenza dell'ingrediente I_2 compresa fra il 20% ed il 30%).

	P_1		P_2	
	Min	Max	Min	Max
I_1	10	20	20	25
I_2	20	30	40	50
I_3	40	60	25	40

I prodotti P_1 e P_2 vengono venduti a 200 e 300 euro/litro, rispettivamente, mentre gli ingredienti, I_1, I_2 e I_3, vengono acquistati a 100, 150 e 140 euro/litro, rispettivamente.

Gli ingredienti, I_1, I_2 e I_3, sono disponibili in quantità giornaliere pari a 150, 170 e 80, litri rispettivamente.

Si fornisca un modello di PL per determinare la miscelazione ottimale degli ingredienti in modo da massimizzare il profitto complessivo.

Si consideri una generalizzazione del modello nella quale compaiono n prodotti, P_1, P_2, …, P_n ed m ingredienti I_1, I_2, …, I_m. Come cambierebbe il nuovo modello se aggiungessimo il vincolo che nella soluzione ottima il prodotto P_k potrebbe comparire solo se comparisse anche il prodotto P_j ?

[4] Si risolva mediante l'algoritmo del simplesso il seguente problema di PL.

$$\max\ z = x_1 + 2x_2$$

$$(\mathrm{I}) \qquad x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$(\mathrm{II}) \qquad 2x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

[5] Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 5x_2 - x_3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

si consideri la base ottima formata dalle variabili x_1 e x_3, nell'ordine.

Si ricavi il valore delle variabili duali ottime.

Si ricavi, per via algebrica, per quali valori di b_2 (ora pari a 8) la **<u>composizione</u>** della base ottima non cambia. __________ $\leq b_2 \leq$ __________?

[6] Si ricavino le condizioni di scarto complementare (condizioni di ortogonalità). Si dica quali condizioni relative ad una coppia di soluzioni primali\duali, ***<u>x</u>*** e ***<u>y</u>***, devono valere, oltre alle condizioni di scarto complementare, per poter affermare che tali soluzioni sono ottime.

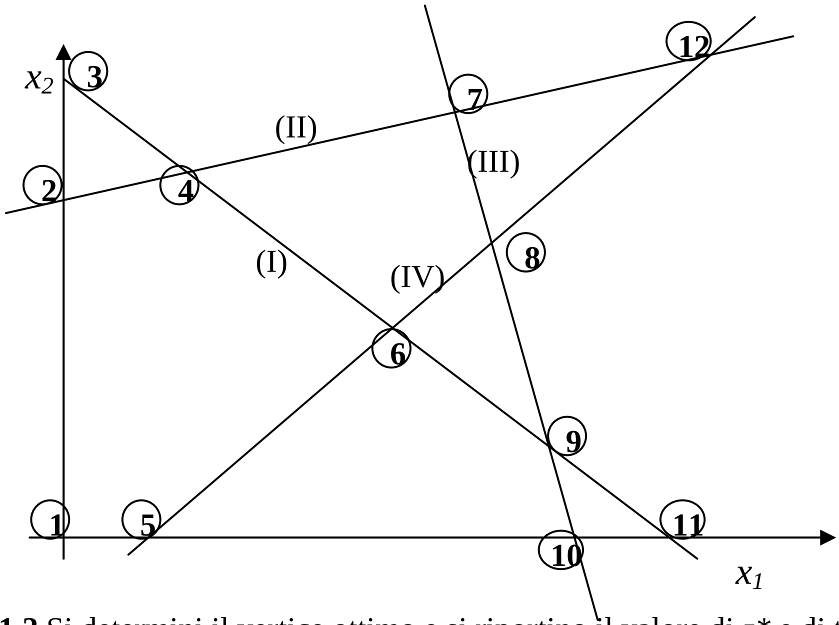
FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA Prof. M.Trubian **a.a. 2008/09**
Prima prova in itinere: 25/11/08

B

Nome studente: .... **Matricola:**......…………......

Esercizio	1	2	3	4	5	6
Valore %	0.25	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Valutazione						

[1] In figura sono rappresentati gli iperpiani di supporto della regione ammissibile di un modello di PL: $(I)\quad x_1 + x_2 = 16,\quad (II)\quad -x_1 + 3x_2 = 32,\quad (III)\quad 5x_1 + x_2 = 64,\quad (IV)\quad x_1 - x_2 = 2$. Si dica quale verso (≤, ≥, =) devono avere i relativi vincoli in modo che i vertici della regione ammissibile siano individuati dai punti 7, 8 e 12. Le variabili x_1 e x_2 sono non negative.



1.1

(I) verso ___

(II) verso ___

(III) verso ___

(IV) verso ___

1.2 Si determini il vertice ottimo e si riportino il valore di z^* e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto o surplus, in corrispondenza della soluzione ottima se la funzione obiettivo è $\max\ z = -x_1 + x_2$

z^*______ x_1_______ x_2_______ x_3_______ x_4_______ x_5_______ x_6

1.3 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di b_1 (ora pari a 16) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ ≤ b_1 ≤ __________

1.4 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di c_2 (ora pari a 1) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ ≤ c_2 ≤ __________

[2] Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema **[1]**.

[3] E' dato un insieme, M, di m regioni nelle quali attivare alcuni servizi di emergenza. E' stato individuato un insieme, N, di $n < m$ possibili localizzazioni per i centri. Per ciascuna potenziale localizzazione $j \in N = \{1,\ldots,n\}$ conosciamo il costo c_j di apertura di un centro e quali regioni vi afferirebbero, cioè $S_j \subset M$. Si fornisca un modello di PLI per stabilire dove aprire i centri in modo che tutte le regioni possano afferire ad almeno uno di essi minimizzando il costo totale di apertura. Come cambia il modello se si chiede che l'eventuale apertura di un centro nella localizzazione k comporti la non apertura di centri nelle localizzazioni h e z ?

[4] Si risolva mediante l'algoritmo del simplesso il seguente problema di PL.

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x_1 + x_2 \leq 4 \\ (\mathrm{II}) & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

[5] Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

si consideri la base ottima formata dalle variabili x_1 e x_2, nell'ordine.
Si ricavi il valore delle variabili duali ottime.
Si ricavi, per via algebrica, per quali valori di b_2 (ora pari a 5) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ $\leq b_2 \leq$ __________?

[6] Si ricavi per via algebrica l'intervallo di valori che può assumere il coefficiente di costo di una variabile in base senza che la composizione della base ottima cambi.

FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA Prof. M.Trubian **a.a. 2008/09**

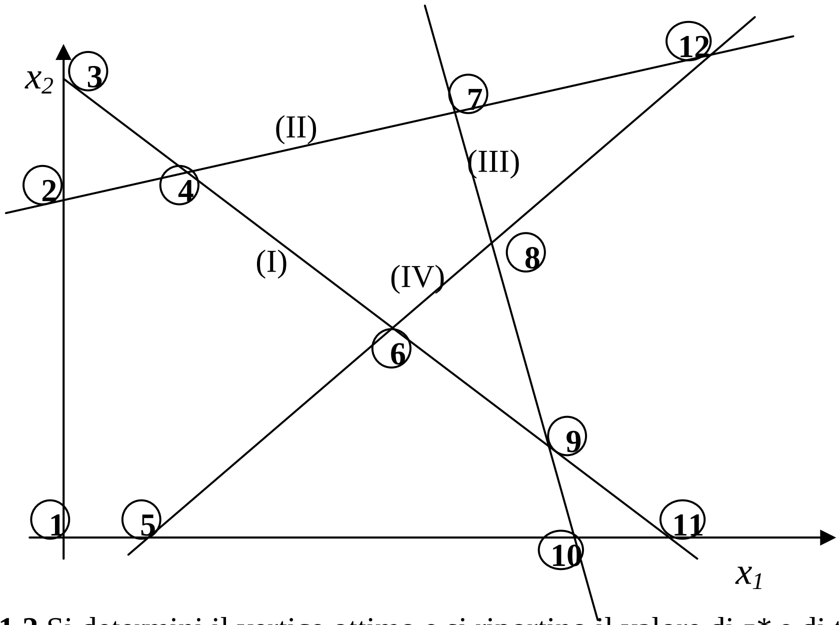
Prima prova in itinere: 25/11/08

C

Nome studente: .... **Matricola:**......………......

Esercizio	1	2	3	4	5	6
Valore %	0.25	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Valutazione						

[1] In figura sono rappresentati gli iperpiani di supporto della regione ammissibile di un modello di PL: $(I)\quad x_1 + x_2 = 16,\quad (II)\quad -x_1 + 3x_2 = 32,\quad (III)\quad 5x_1 + x_2 = 64,\quad (IV)\quad x_1 - x_2 = 2$. Si dica quale verso (≤, ≥, =) devono avere i relativi vincoli in modo che i vertici della regione ammissibile siano individuati dai punti 5, 6, 9 e 10. Le variabili x_1 e x_2 sono non negative.



1.1

(I) verso ___

(II) verso ___

(III) verso ___

(IV) verso ___

1.2 Si determini il vertice ottimo e si riportino il valore di z^* e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto o surplus, in corrispondenza della soluzione ottima se la funzione obiettivo è $\max\ z = -x_1 + 4x_2$

z^*_____ x_1______ x_2______ x_3______ x_4______ x_5______ x_6

1.3 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di b_2 (ora pari a 32) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ $\leq b_2 \leq$ __________

1.4 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di c_2 (ora pari a 4) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ $\leq c_2 \leq$ __________

[2] Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema **[1]**.

[3] Si consideri un sistema di produzione e distribuzione. Ci sono *n* siti candidati ad ospitare unità produttive. Ogni unità produttiva se aperta nel sito *i* ha una capacità produttiva massima a_i, con $i=1,\dots,n$. L'attivazione di una unità produttiva nel sito *i* comporta un costo fisso $f_i > 0$. Vi sono *m* magazzini, ognuno con una domanda b_j da soddisfare, con $j=1,\dots,m$. Indichiamo con $c_{ij} \geq 0$ il costo di trasporto di una unità di prodotto dal sito *i* al magazzino *j*. Si fornisca un modello per determinare dove aprire le unità produttive e come trasportare il prodotto dalle unità produttive aperte ai magazzini in modo da soddisfare la domanda senza eccedere la capacità produttiva, minimizzando i costi di apertura e di trasporto.
Come cambia il modello se subentra un costo fisso anche per l'uso delle vie di comunicazione, per cui l'eventuale trasporto di merce dal sito *i* al magazzino *j* comporta anche un costo fisso $h_{ij} > 0$ indipendente dalla quantità di merce trasportata?

[4] Si risolva mediante l'algoritmo del simplesso il seguente problema di PL.

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & 4x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ (\mathrm{II}) & 5x_1 - 2x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

[5] Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 - x_2 - 5x_3 \\ & 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4 \\ & 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

si consideri la base ottima formata dalle variabili x_2 e x_3, nell'ordine.
Si ricavi il valore delle variabili duali ottime.
Si ricavi, per via algebrica, per quali valori di b_1 (ora pari a 4) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ $\leq$ b_1 $\leq$ __________?

[6] Si enunci e dimostri il teorema di dualità debole. Si riporti una tabella che indichi le possibili situazioni che si possono presentare considerando una coppia primale\duale di problemi P e D, dove tali problemi possono essere con soluzione ottima finita, inammissibili, o illimitati.

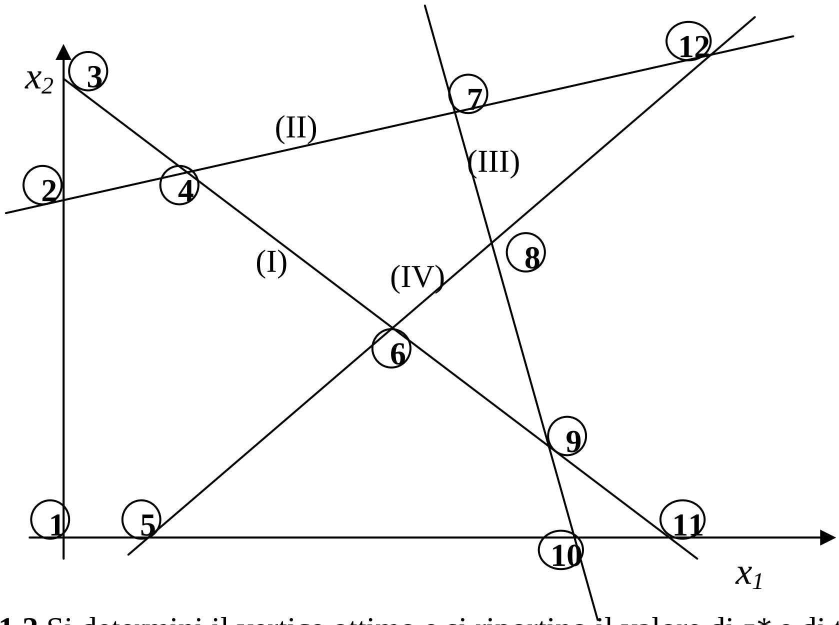
FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA Prof. M.Trubian **a.a. 2008/09**
Prima prova in itinere: 25/11/08

D

Nome studente: .... **Matricola:**......…………......

Esercizio	1	2	3	4	5	6
Valore %	0.25	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Valutazione						

[1] In figura sono rappresentati gli iperpiani di supporto della regione ammissibile di un modello di PL: $(I)\quad x_1 + x_2 = 16,\quad (II)\quad -x_1 + 3x_2 = 32,\quad (III)\quad 5x_1 + x_2 = 64,\quad (IV)\quad x_1 - x_2 = 2$. Si dica quale verso (≤, ≥, =) devono avere i relativi vincoli in modo che i vertici della regione ammissibile siano individuati dai punti 8, 9, 11 e 12. Le variabili x_1 e x_2 sono non negative.



1.1

(I) verso ___

(II) verso ___

(III) verso ___

(IV) verso ___

1.2 Si determini il vertice ottimo e si riportino il valore di z^* e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto o surplus, in corrispondenza della soluzione ottima se la funzione obiettivo è $\max\ z = -10x_1 + x_2$

z^*______ x_1______ x_2______ x_3______ x_4______ x_5______ x_6

1.3 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di b_1 (ora pari a 16) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ ≤ b_1 ≤ __________

1.4 Si ricavi, per via grafica, per quali valori di c_2 (ora pari a 1) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ ≤ c_2 ≤ __________

[2] Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema **[1]**.

[3] Si consideri una ditta che deve caricare un insieme di n oggetti, di ingombro w_j, per $j=1,\dots,n$, su un insieme di al più m veicoli di diversa capacità di carico b_i, e diverso costo fisso di utilizzo c_i, con $i=1,\dots,m$. Si fornisca un modello per stabilire come assegnare gli oggetti ai veicoli in modo da rispettarne la capacità e da spendere il meno possibile. N.B. non è indispensabile utilizzare tutti gli m veicoli ma solo quelli sufficienti a trasportare gli n oggetti.
Come cambia il modello se si aggiunge un costo p_{ij} che si deve sostenere se viene assegnato l'oggetto j al veicolo i, per $j=1,\dots,n$ ed $i=1,\dots,m$?

[4] Si risolva mediante l'algoritmo del simplesso il seguente problema di PL.

$$\max\ z = x_1 + 2x_2$$

$$(\mathrm{I}) \qquad x_1 + x_2 \leq 6$$

$$(\mathrm{II}) \qquad 2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

[5] Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\min \quad -4x_1 - 8x_2 + 6x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

si consideri la base ottima formata dalle variabili x_1 e x_3, nell'ordine.

Si ricavi il valore delle variabili duali ottime.

Si ricavi, per via algebrica, per quali valori di b_1 (ora pari a 2) la **composizione** della base ottima non cambia. __________ $\leq$ b_1 $\leq$ __________?

[6] Dato un problema di minimo in forma standard $\min\{\underline{\boldsymbol{c}}^T\underline{\boldsymbol{x}} \mid A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}},\ \underline{\boldsymbol{x}} \geq \underline{\boldsymbol{0}}\}$ si ricavino le condizioni di ottimalità rispetto alla base B. Si enuncino le condizioni di illimitatezza.