Mix Produttivo

- Si dispone di i=1,...,m risorse produttive (ad esempio, materie prime) in quantità limitata. La massima disponibilità delle risorse è $b_1,...,b_m$
- Si possono produrre j=1,...,n diversi prodotti utilizzando (con una data tecnologia) le risorse disponibili
- Sono note le quantità di risorse necessarie per produrre una unità di ciascun possibile prodotto: per produrre una unità del prodotto j-mo si utilizzano a_{ij} unità della risorsa i-ma
- Agli n prodotti sono associati i profitti unitari $c_1,..., c_n$ (profitto per unità di prodotto). Si ipotizza che tutta la produzione venga venduta.

Problema Determinare quali prodotti produrre ed in quale quantità in modo da massimizzare il profitto complessivo

Problema della Dieta

- Un determinato mangime per animali deve contenere per ogni *kg* almeno 2 *hg* di proteine, 4 *hg* di carboidrati e 3 *hg* di grasso. Si possono miscelare 4 ingredienti con le seguenti caratteristiche (in *hg* per ogni *kg*)

Ingredienti	Proteine	Carboidrati	Grasso	Costo *euro*/*kg*
1	1	4	3	3
2	3	4	2	6
3	2	3	3	5
4	2	2	4	6

Problema Determinare quali ingredienti ed in quale quantità miscelare in modo da minimizzare il costo del mangime

Miscelazione (*blending*)

- Due tipi di prodotto (es. benzine), B1 e B2 si ottengono miscelando tre tipi di materie grezze (es. petroli), P1, P2 e P3
- Le percentuali delle materie grezze nei prodotti finiti sono vincolate come in tabella

	B1		B2	
	Min	Max	Min	Max
P1	20	30	10	15
P2	10	20	30	50
P3	50	70	55	80

- I prodotti finiti B1 e B2 vengono venduti a 40 e 30 cent./litro, rispettivamente
- Le materie grezze, P1, P2 e P3, vengono acquistate a 10, 16 e 14 cent./litro, rispettivamente
- Le materie grezze, P1, P2 e P3, sono disponibili i quantità giornaliere pari a 100.000, 70.000 e 120.000, rispettivamente

Problema Determinare la miscelazione ottimale delle materie prime in modo da massimizzare il profitto complessivo

Turnazione del personale

- Tre turni di lavoro (mattina, pomeriggio, notte)
- n lavoratori che svolgono cinque turni settimanali
- dopo un turno di lavoro vi devono essere almeno due turni di riposo
- il personale richiesto viene indicato nella tabella a fianco
- Ogni lavoratore propone cinque turni in ordine di preferenza come ad esempio:

	Lun.	Mar.	Mer.	Gio.	Ven.	Sab.	Dom.
mattina	2	1	1	3	1	1	1
sera	1	1	0	0	2	1	1
notte	1	0	0	0	1	1	1

	Lun.	Mar.	Mer.	Gio.	Ven.	Sab.	Dom.
mattina	1		3	2			
sera					4	5	
notte							

Problema Assegnare i lavoratori ai turni in modo da massimizzare la somma totale delle preferenze, nel rispetto di tutti i vincoli

Problema di trasporto

- Consideriamo un sistema di produzione e distribuzione monoprodotto. Ci sono n siti che ospitano unità produttive, ognuna di esse ha una capacità massima a_j, con $i=1,\ldots,n$. Vi sono m magazzini, ognuno con una domanda b_j da soddisfare, con $j=1,\ldots,m$. Indichiamo con $c_{ij} \geq 0$ il costo di trasporto di una unità di prodotto dal sito i al magazzino j.

Problema: come trasportare il prodotto dalle unità produttive ai magazzini in modo da soddisfare la domanda senza eccedere la capacità produttiva, minimizzando i costi di trasporto

Problema di trasporto e localizzazione di impianti

- Come nell'esempio precedente ma i siti produttivi sono n siti ***candidati*** ad ospitare unità produttive. L'attivazione di una unità produttiva nel sito i ha un costo fisso $f_i > 0$

Problema: dove aprire le unità produttive e come trasportare il prodotto dalle unità produttive ***aperte*** ai magazzini in modo da soddisfare la domanda senza eccedere la capacità produttiva, minimizzando i costi di apertura e di trasporto

Problema di copertura con insiemi (*set covering*)

- Sono dati un insieme $M=\{1,2,\ldots,m\}$ ed una famiglia di n suoi sottinsiemi $S_j \subseteq M$, con $j \in \mathrm{N} = \{1,\ldots,n\}$, dove ogni sottoinsieme S_j ha un costo c_j.

Problema: trovare un insieme $T \subseteq N$ tale che l'unione degli S_j con $j \in \mathrm{T}$ sia uguale ad M, cioè l'unione dei sottoinsiemi scelti copre tutti gli elementi di M, minimizzando il costo totale dei sottoinsiemi scelti

Esempio di applicazione: apertura di centri di emergenza. E' dato un insieme M di m regioni nelle quali attivare alcuni servizi di emergenza. E' stato individuato un insieme N di $n < m$ possibili destinazioni per i centri. Per ciascuna potenziale destinazione $j \in \mathrm{N} = \{1,\ldots,n\}$ conosciamo il costo c_j di apertura di un centro e quali regioni vi afferirebbero, cioè S_j. Dove aprire i centri in modo che tutte le regioni possano afferire ad almeno uno di essi minimizzando il costo totale di apertura?

Localizzazione di servizi

- $\mathrm{N} = \{1,\ldots, n\}$ insieme delle potenziali localizzazioni dei servizi ed $\mathrm{I} = \{1,\ldots, m\}$ insieme dei clienti
- La località $j \in \mathrm{N}$ ha capacità u_j e costo di attivazione c_j. Il cliente $i \in \mathrm{I}$ ha una richiesta pari a b_i
- Il costo da sostenere per servire il cliente i dalla località j e' pari ad h_{ij}
- Ogni cliente viene servito da una sola località

Problema Determinare la localizzazione dei servizi in modo da minimizzare i costi di attivazione e di servizio complessivi

Il problema Knapsack

- Ci sono n oggetti (es. n possibili investimenti), ne conosciamo il valore p_j (es. la rendita annuale) e l'ingombro w_j (l'investimento corrispondente), per $j=1,\ldots,n$. È data la capacità massima, b, di un contenitore (es. il budget disponibile).

Problema*:* quali oggetti inserire nel contenitore rispettando il limite di capacità e massimizzando il valore degli oggetti inseriti (es. quali investimenti effettuare al fine di massimizzare il rendimento complessivo senza superare il budget)

Esempio: costruire il Cd ideale. Ogni oggetto è un file musicale il cui valore è dato dal nostro indice di gradimento ed il cui ingombro è la dimensione in kbyte. Il contenitore è un Cd-rom con 700 Mbyte di capacità. Nell'ipotesi che la dimensione complessiva dei file musicali a disposizione ecceda i 700 Mbyte vogliamo scegliere quali brani inserire massimizzando il gradimento complessivo

Problema di bin packing

- Ci sono n oggetti di cui conosciamo l'ingombro w_j, per $j=1,\ldots,n$. Sono dati dei contenitori di capacità massima b.

Problema*:* assegnare gli oggetti ai contenitori in modo da rispettarne la capacità e da utilizzarne il minimo numero.

Problema di assegnamento e sequenziamento

- Ci sono m macchine identiche ed n lavorazioni. Ogni lavorazione j, con $j=1,\ldots,n$, richiede di essere processata da una qualsiasi delle m macchine per un tempo di processamento ininterrotto p_j. Ogni macchina processa una sola lavorazione alla volta.

Problema: come assegnare le lavorazioni alle macchine minimizzando l'istante di completamento di tutte le lavorazioni.

Esempio di applicazione: taglio di tessuto. E' disponibile un rotolo (molto lungo) di tessuto pregiato, alto 150 cm. E' necessario ritagliare n pezzature di 50 cm di altezza e di lunghezza variabile fra i 50 ed i 250 cm. Come assegnare le n pezzature alle m=3 strisce ricavabili dal rotolo in modo da minimizzare i metri di tessuto utilizzati?

Problema di sequenziamento multiprocessore

Ci sono m macchine, $k=1,\ldots,m$, ed n lavorazioni, $j=1,\ldots,n$. Ogni lavorazione j richiede l'attraversamento delle macchine nell'ordine $1,2,\ldots,m$, ed un tempo di processamento ininterrotto S_{jk} su ciascuna macchina k. Ogni macchina processa una sola lavorazione alla volta.

Problema: in quale ordine processare le lavorazioni su ciascuna macchina volendo minimizzare l'istante di completamento di tutte le lavorazioni

Esempio di applicazione: la lettura dei quotidiani
Quattro studenti che condividono un appartamento ricevono puntualmente alle 8 del mattino tre quotidiani. Tutti e tre gli studenti leggono i giornali nello stesso ordine, non interrompono mai la lettura di un giornale, leggono individualmente e impiegano tempi (ormai fissi) ma diversi per ciascuna coppia (studente, giornale). Come devono scambiarsi i giornali in modo da terminare la lettura nel minor tempo possibile?

Problema di pianificazione della produzione

- Desideriamo determinare un piano di produzione di un singolo prodotto su un orizzonte temporale di *n* periodi. Per ciascun periodo $t=1,\dots,n$ conosciamo: la domanda da soddisfare D_t ed il costo di produzione c_t e di magazzino i_t, per unità di prodotto. La capacità massima di produzione è *C*.

Problema: pianificare la produzione in modo da soddisfare la domanda prevista minimizzando i costi di produzione e di magazzino

Estensione al caso di produzione con lotto minimo

- Come il problema precedente ma con il vincolo che la dimensione del lotto minimo di produzione è pari ad *L*.

Estensione al caso di produzione con costi fissi

- Come il problema precedente ma con il vincolo che al prodotto P_t è associato, oltre al costo variabile di produzione c_t, anche un costo fisso di attrezzaggio *k*: $C(P_t) = \begin{cases} k + c_t P_t & \text{se } P_t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Problema di sequenziamento monoprocessore

C'è una macchina e ci sono *n* lavorazioni, $j=1,\dots,n$. Ogni lavorazione *j* ha un tempo di processamento p_j , è disponibile a partire dall'istante r_j (release date) e deve essere completata entro la data d_j (deadline). La macchina può processare una sola attività alla volta.

Problema: in quale ordine processare le lavorazioni sulla macchina volendo minimizzare la somma degli istanti di completamento di tutte le lavorazioni

Modellare vincoli logici utilizzando variabili binarie

In primo luogo associamo una variabile binaria a ciascuna variabile logica.
Ad esempio alla variabile logica *X*="attivare l'impianto di produzione" associamo la variabile binaria *x* nel seguente modo:

	valore	significato
$x =$	1	"attivazione dell'impianto di produzione"
	0	"non attivazione dell'impianto di produzione"

Rappresentazione degli operatori logici: $\neg$ (non), $\vee$ (or), $\wedge$ (and)

Rappresentiamo	con
$\neg X$	$(1 - x)$
$X \vee Y$	$x + y$
$X \wedge Y$	$x \geq 1,\ y \geq 1$ oppure $x + y \geq 2$
$X \Rightarrow Y$	$x \leq y$
$X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n \Rightarrow Y$	$\sum_1^n x_i \leq n\, y$
$X \Rightarrow Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_n$	$x \leq \sum_1^n y_i$
$X \Rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_n$	$n\, x \leq \sum_1^n y_i$

Esempi

$X \Rightarrow (\neg Y \vee \neg Z)$ diviene $x \leq (1 - y) + (1 - z)$ cioè $x + y + z \leq 2$

$(X \vee Y) \Rightarrow (\neg Z)$ diviene $x + y \leq 2\,(1-z)$

$(X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee Y)$ diviene $x + y \geq 1,\ (1-z)+y \geq 1$

Almeno due fra X, Y e Z diviene $x + y + z \geq 2$

Al più k fra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diviene $\sum_1^n x_i \leq k$