Automi two-way e complessità descrizionale

Giovanni Pighizzini

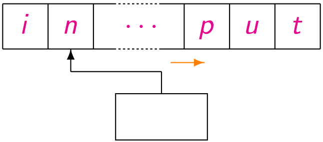
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Milano

Palermo, 5 marzo 2014

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Alberto Bertoni
(1946–2014)

Automi a stati finiti



Versione one-way:

a ogni passo la testina viene spostata a destra di una posizione

- 1DFA: transizioni *deterministiche*
- 1NFA: transizioni *nondeterministiche*

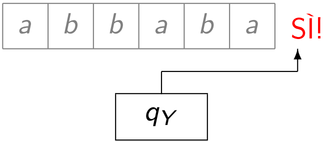
Esempio 0

$\Sigma = \{a, b\}$, $n > 0$:

$$H_n = (a + b)^{n-1} a (a + b)^*$$

Controlla l'n-esimo simbolo da sinistra!

Es. $n = 4$



1DFA: $n + 2$ stati

Esempio 1

$\Sigma = \{a, b\}$, $n > 0$:

$$L_n = (a + b)^* a (a + b)^{n-1}$$

Controlla l'n-esimo simbolo da destra!

Come posso individuarlo?

Usa il nondeterminismo!

Guess Quando l'automa legge una a può "scommettere" che sia l'n-esimo simbolo da destra

Verify Nei passi successivi verifica la scommessa

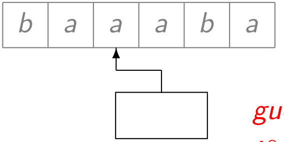
Esempio 1

$\Sigma = \{a, b\}$, $n > 0$:

$$I_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1}$$

Controlla l'n-esimo simbolo da destra!

Es. $n = 4$



guess

4° simbolo da destra

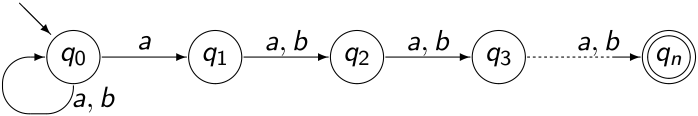
1NFA: $n + 1$ stati

Esempio 1

$\Sigma = \{a, b\}$, $n > 0$:

$$l_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1}$$

Controlla l'*n*-esimo simbolo da destra!



Bene!

...ma mi serve un automa *deterministico*...

Ad ogni passo ricorda gli ultimi *n* simboli letti!

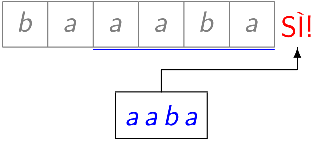
Esempio 1

$\Sigma = \{a, b\}$, $n > 0$:

$$I_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1}$$

Controlla l'n-esimo simbolo da destra!

Es. $n = 4$



1DFA: 2^n stati

...ma mi serve un automa deterministico più piccolo...

Il più piccolo è questo!

Tuttavia...

Esempio 1

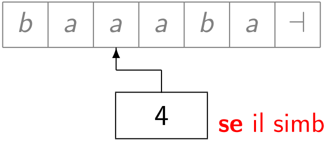
$\Sigma = \{a, b\}$, $n > 0$:

$$l_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1}$$

Controlla l'n-esimo simbolo da destra!

...se si può muovere la testina all'indietro...

Es. $n = 4$



SÌ!

se il simbolo è a **allora accetta**
altrimenti rifiuta

Automa deterministico *two-way* (2DFA): $n + \ldots$ stati

Esempio 1

$\Sigma = \{a, b\}$, $n > 0$:

$$I_n = (a + b)^* a (a + b)^{n-1}$$

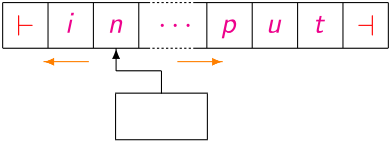
Controlla l'n-esimo simbolo da destra!

I_n è accettato da

- 1NFA e 2DFA con circa
  lo stesso numero di stati $n+\ldots$
- ogni 1DFA è esponenzialmente più grande ($\geq 2^n$ stati)

In questo esempio,
il nondeterminismo può essere eliminato tornando indietro
e mantenendo approssimativamente lo stesso numero di stati

Automi two-way: qualche dettaglio tecnico



- Due *delimitatori* dell'input $\vdash$ and $\dashv$
- Mosse
  - a *sinistra*
  - a *destra*
  - *stazionarie*
- Configurazione iniziale
- Configurazione accettante
- *Possibilità di computazioni infinite*
- Versioni *deterministica* (2DFA) e *nondeterministica* (2NFA)

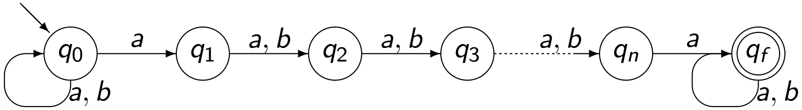
1DFA, 1NFA, 2DFA, 2NFA

Che potenza hanno questi modelli?

Caratterizzano tutti la classe dei *linguaggi regolari*, tuttavia...

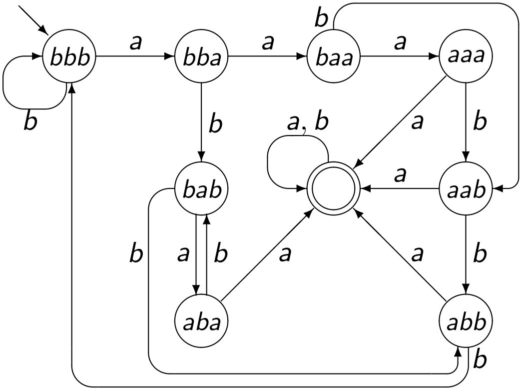
...alcuni sono più succinti

Esempio: $L_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1} a (a+b)^*$



1NFA: $n+2$ stati

Esempio: $L_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1} a (a+b)^*$



$n = 3$

1DFA minimo: $2^n + 1$ stati

Esempio: $L_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1} a (a+b)^*$

2DFA ?

Anche leggendo da destra,
sembra necessario ricordare una "finestra" di n simboli

Tecnica differente!

Esempio: $L_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1} a (a+b)^*$

$\vdash$	b	b	a	b	a	a	b	a	a	a	$\dashv$

$n = 4$

finché non trovi una a muovi a destra
muovi n celle a destra
se c'è una a **allora accetta**
altrimenti muovi $n-1$ celle a sinistra
ricomincia dal primo passo
Eccezione: **se** raggiungi $\dashv$ **allora rifiuta**

2DFA: $2n+_{\dots}$ stati

Esempio: $L_n = (a+b)^*a(a+b)^{n-1}a(a+b)^*$

Un algoritmo differente

$\vdash$	b	b	a	a	a	a	b	a	b	b	a	b	b	$\dashv$

$n = 4$

Controlla tutte le posizioni k con $k \equiv 1 \pmod n$
Controlla tutte le posizioni k con $k \equiv 2 \pmod n$
...
Controlla tutte le posizioni k con $k \equiv n \pmod n$

Questa strategia può essere implementata usando $O(n)$ stati!

Automi *sweeping*:

- Transizioni deterministiche
- Inversioni *solo alle estremità* dell'input

Esempio: $L_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1} a (a+b)^*$

Dunque:

- L_n è accettato da
  - 1NFA
  - 2DFA
  - automa sweeping

  con $O(n)$ stati
- Ogni 1DFA richiede un numero di stati esponenziale

Anche in questo esempio,
si può rimuovere il nondeterminismo utilizzando le inversioni
ottenendo un numero di stati lineare

Problema
È sempre possibile *sostituire nondeterminismo con inversioni*
senza aumentare di molto gli stati dell'automa?

Costi delle simulazioni ottimali tra automi

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{1NFA} \arrow[r, "?"] \arrow[dr, "2^n"] & \mathrm{2DFA} \arrow[d, "O(2^{n\log n})"] & \mathrm{2NFA} \arrow[l, "?"'] \arrow[dl, "O(2^{n^2})"'] \\
 & \mathrm{1DFA} &
\end{tikzcd}$$

[Rabin&Scott '59, Shepardson '59, Meyer&Fischer '71, ...]

Questione

"Quanto" la possibilità di muovere la testina in entrambe le direzioni risulta utile nell'eliminazione del nondeterminismo?

Costi delle simulazioni ottimali tra automi

$$
\begin{tikzcd}
\text{1NFA} \arrow[r, "?"] \arrow[dr, "2^n"] & \text{2DFA} \arrow[d, "O(2^{n\log n})"] & \text{2NFA} \arrow[l, "?"'] \arrow[dl, "O(2^{n^2})"] \\
& \text{1DFA} &
\end{tikzcd}
$$

Problema ([Sakoda&Sipser '78])

Esistono simulazioni polinomiali di

- *1NFA mediante 2DFA*
- *2NFA mediante 2DFA ?*

Congettura

Queste simulazioni non sono polinomiali

Costi delle simulazioni ottimali tra automi

$$\begin{tikzcd}
\text{1NFA} \arrow[r, "?"] \arrow[dr, "2^n"] & \text{2DFA} \arrow[d, "O(2^{n \log n})"] & \text{2NFA} \arrow[l, "?"'] \arrow[dl, "O(2^{n^2})"] \\
& \text{1DFA} &
\end{tikzcd}$$

- Limiti superiori esponenziali
  dalle simulazioni di 1NFA e 2NFA mediante 1DFA
- Limiti inferiori polinomiali
  $\Omega(n^2)$ per la simulazione di 1NFA mediante 2DFA

[Chrobak '86]

Il problema di Sakoda e Sipser

- Molto difficile nel caso generale
- Risultati poco incoraggianti:

  Limiti inferiori e superiori molto distanti
  (Polinomiali vs esponenziali)

- Dunque:

  Studio di versioni particolari del problema!

NFA vs 2DFA: versioni particolari

(i) Restrizioni sulle macchine simulanti (2DFA)

- automi *sweeping* [Sipser '80]
- automi *oblivious* [Hromkovič&Schnitger '03]
- automi con *poche inversioni* [Kapoutsis '11]

(ii) Restrizioni sui linguaggi

- *caso unario* [Geffert Mereghetti&P '03]

(iii) Restrizioni sulle macchine simulate (2NFA)

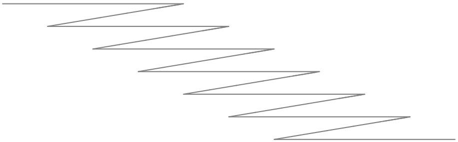
- automi *outer nondeterministic* [Guillon Geffert&P '12]

Di nuovo $L_n = (a+b)^*a(a+b)^{n-1}a(a+b)^*$

Algoritmo "naif": confronta le posizioni i e $i+n$, $i = 1, 2, \ldots$

$\vdash$	b	b	a	b	a	a	b	a	a	a	$\dashv$

$n = 4$



Anche in questo caso $O(n)$ stati!

Automi oblivious:

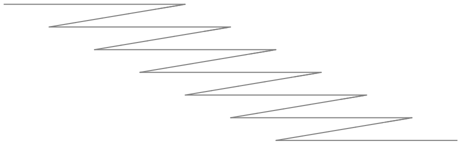
- Transizioni deterministiche
- Stessa "traiettoria" della testina per tutti gli input della stessa lunghezza

Di nuovo $L_n = (a+b)^* a (a+b)^{n-1} a (a+b)^*$

Algoritmo "naif": confronta le posizioni i e $i+n$, $i = 1, 2, \ldots$

$\vdash$	b	b	a	b	a	a	b	a	a	a	$\dashv$

$n = 4$



Numero di inversioni della testina:
Su input di lunghezza m:

- circa $2m$ inversioni,
  numero *lineare* rispetto alla lunghezza dell'input
- l'algoritmo "sweeping" ne utilizza circa $2n$,
  numero *costante* rispetto alla lunghezza dell'input

Un'altra possibile restrizione

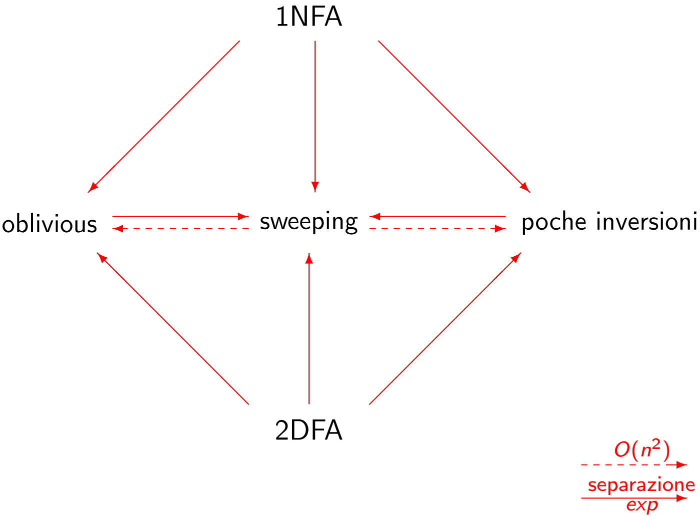
Automi con "poche" inversioni [Kapoutsis '11]:

- Numero di inversioni sublineare rispetto alla lunghezza dell'input
- Modello *deterministico*

Teorema ([Kapoutsis&P '12])

Se il numero di inversioni effettuate da un 2DFA è sublineare allora deve essere costante

Separazioni



[Sipser '80, Berman '80, Micali '81, Hromkovič&Schnitger '03, Kapoutsis '11, Kutrib Malcher&P '12]

Il problema di Sakoda&Sipser

Problema ([Sakoda&Sipser '78])

Esistono simulazioni polinomiali di

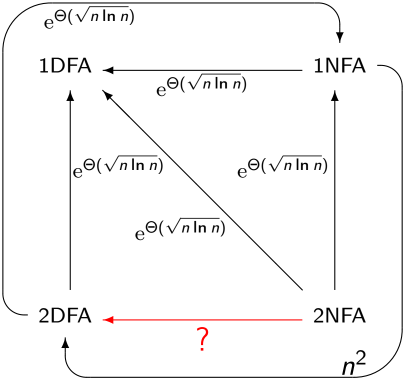
- *1NFA mediante 2DFA*
- *2NFA mediante 2DFA ?*

Altra possibile restrizione:

Caso unario $\#\Sigma = 1$

Simulazioni ottimali tra automi unari

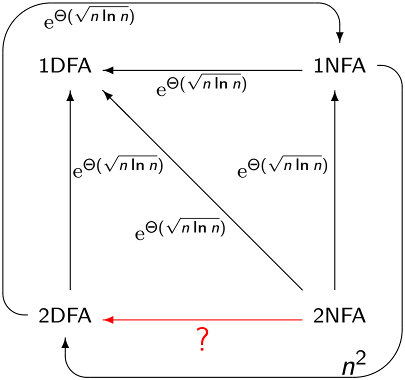
I costi delle simulazioni tra automi unari
sono differenti rispetto al caso generale



[Chrobak '86, Mereghetti&P '01]

Simulazioni ottimali tra automi unari

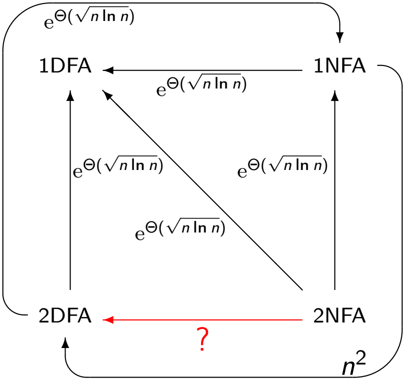
I costi delle simulazioni tra automi unari
sono differenti rispetto al caso generale



1NFA $\rightarrow$ 2DFA
Nel caso unario
questo problema è risolto!
(simulazione polinomiale)

Simulazioni ottimali tra automi unari

I costi delle simulazioni tra automi unari
sono differenti rispetto al caso generale



2NFA $\rightarrow$ 2DFA
Questo problema è aperto
anche nel caso unario!

- limite superiore $e^{\Theta(\sqrt{n \ln n})}$
  (da 2NFA $\rightarrow$ 1DFA)
- limite inferiore $\Omega(n^2)$
  (da 1NFA $\rightarrow$ 2DFA)

Il limite superiore è stato
ridotto a $e^{O(\ln^2 n)}$!

Una forma normale per i 2NFA unari
[Geffert Mereghetti&P '03]

Automi *quasi sweeping* (qsNFA):

- *scelte nondeterministiche* e
- *inversioni di testina*

possibili *solo* quando la testina visita i delimitatori

Teorema (Simulazione quasi sweeping)

Ogni 2NFA A unario con n stati può essere trasformato in un 2NFA M t.c.

- *M è quasi sweeping*
- *M ha al più $N \leq 2n + 2$ stati*
- *M e A sono "quasi equivalenti"*
  (possibili differenze solo su stringhe di lunghezza $\leq 5n^2$)

Simulazione quasi sweeping: conseguenze

(i) Simulazione subesponenziale di 2NFA unari mediante 2DFA
Ogni 2NFA unario con n stati può essere simulato da un 2DFA con $e^{O(\ln^2 n)}$ stati
Tecnica *divide–et–impera* [Geffert Mereghetti&P '03]

(ii) Complementazione polinomiale di 2NFA unari
Conteggio induttivo per qsNFA
[Geffert Mereghetti&P '07]

(iii) Simulazione polinomiale di 2NFA unari mediante 2DFA *nell'ipotesi* $\mathrm{L} = \mathrm{NL}$
[Geffert&P '11]

(iv) "Disambiguazione" polinomiale di 2NFA unari
[Geffert&P '11]

Restrizioni su 2NFA

Automi *outer nondeterministic* (OFA) [Guillon Geffert&P '12]:

- *scelte nondeterministiche* possibili
  solo quando la testina visita i *delimitatori*

Dunque:

- Nessuna restrizione sull'alfabeto
- Nessuna restrizione sulle inversioni
- *Transizioni deterministiche* sui "veri" simboli di input

Automi outer nondeterministic (OFA)

I risultati ottenuti per il caso unaro
sono stati estesi a questi modelli 2OFA: [Guillon Geffert&P '12]

(i) Simulazione subesponenziale di 2OFA mediante 2DFA
(ii) Complementazione polinomiale di 2OFA
(iii) Simulazione polinomiale di 2OFA mediante 2DFA
nell'ipotesi L = NL
(iv) "Disambiguazione" polinomiale di 2OFA

Tecniche parzialmente differenti dal caso unario
Eliminazione dei loop

Problema di Sakoda&Sipser: stato corrente

- Limiti superiori

	1NFA→2DFA	2NFA→2DFA
caso unario e OFA	$O(n^2)$ ottimale	$e^{O(\ln^2 n)}$
caso generale	esponenziale	esponenziale

Caso unario [Chrobak '86, Geffert Mereghetti&P '03]
OFA [Guillon Geffert&P '12]

- Limiti inferiori
In tutti i casi, il miglior limite inferiore noto è $\Omega(n^2)$
[Chrobak '86]

Osservazioni conclusive

Se si parla di...

...automi a stati finiti

di solito ci si riferisce a
Automi one-way

...Turing machines

di solito ci si riferisce a
Macchine di Turing two-way

Perché questa differenza?

In entrambi i casi:

- *Computabilità*
- *Complessità*

Minicomplexity

- Teoria della complessità per gli automi two-way

[Kapoutsis, DCFS 2012]

Osservazioni conclusive

- Il problema di Sakoda e Sipser è una sfida molto stimolante
- Nello studio di casi particolari sono stati esaminati vari modelli interessanti e piuttosto naturali
- I risultati ottenuti in casi particolari, sebbene non risolvano il problema generale, sono non banali e, in vari casi, molto profondi
- Legami con la complessità strutturale e in spazio
  - problemi
  - tecniche
- Legami con la teoria dei numeri (automi unari)

Grazie per l'attenzione!