ES. 14.15 Calcolare in $t=1$ la derivata della funzione composta $F(t) = f(x(t), y(t))$ con:

$$f(x,y) = xy + e^{x+3y}$$
$$x(t) = 3t^4 - 2t^3 + 1$$
$$y(t) = t-3.$$

Osserviamo che le funzioni f, x e y sono continue e derivabili; si può mostrare che anche la funzione composta F lo è.

Dalla Regola di Derivazione delle Funzioni Composte (vedi Guerraggio, pag. 376) abbiamo:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t)$$

Calcoliamo quindi le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, e le derivate x', y'.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + e^{x+3y}$$

funzione di x e y

(ottenuto applicando le regole di derivazione di f rispetto a x considerando y come costante)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3e^{x+3y}$$

$$\frac{dx}{dt} = 12t^3 - 6t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 1.$$

Quindi la derivata di ~~f~~ F (rispetto al suo argomento t) è:

$$F'(t) = \left(y(t) + e^{x(t)+3y(t)}\right)(12t^3 - 6t^2) + \left(x(t) + 3e^{x(t)+3y(t)}\right)\cdot 1$$

che valutata in $t=1$ è:

$$F'(1) = \left(y(1) + e^{x(1)+3y(1)}\right)(12-6) + \left(x(1) + 3e^{x(1)+3y(1)}\right) =$$

$$= \left(-2 + e^{2+(-6)}\right)\cdot 6 + \left(2 + 3e^{2-6}\right) = -10 + 9e^{-4}$$

dato che $x(1) = 3-2+1 = 2$ e $y(1) = 1-3 = -2$.

ES: 14.30 Determinare gli eventuali punti stazionari di

$$f(x,y) = (4-y^2)(xy^2-1)$$

I punti stazionari sono quelli del dominio di f che annullano tutte le derivate parziali di f:

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} = (0,0)$$

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$$

Calcoliamo allora le derivate parziali e annulliamole:

$$\nabla f = \underline{0}: \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (4-y^2)y^2 = 0 & \text{I} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y(xy^2-1) + (4-y^2)2xy = 0 & \text{II} \end{cases}$$

I: Le soluzioni sono $y=0$ oppure $4-y^2=0 \iff y = \pm 2$

II: $-2xy^3 + 2y + 8xy - 2xy^3 = 0$

$$-4xy^3 + 2y + 8xy = 0$$

$$y(-4xy^2 + 2 + 8x) = 0$$

Sostituendo le soluzioni $y_1 = 0$, $y_2 = +2$, $y_3 = -2$ abbiamo le soluzioni date da:

1) $0(\ldots) = 0$ che è un'identità $\Rightarrow \forall x_1 \in \mathbb{R}$

2) $2\cdot(-4x\cdot 4 + 2 + 8\cdot x) = 0$

$-8x + 2 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = +\frac{1}{4}$

3) $-2(-4x\cdot 4 + 2 + 8x) = 0$

$-8x + 2 = 0 \qquad \Rightarrow x_3 = +\frac{1}{4}$

I punti ~~critici~~ stazionari di f sono quindi:

$(x_1, 0)\ \forall x_1 \in \mathbb{R}$, $\left(+\frac{1}{4}, 2\right)$, $\left(+\frac{1}{4}, -2\right)$

<u>ES</u>: 14.35 Calcolare gli eventuali estremanti di
$$f(x,y) = 4xy - x^2y - xy^2$$
Per determinare gli estremanti di f dobbiamo:

1) trovare i punti stazionari di f
2) determinare la matrice Hessiana (che dipende dal punto (x,y)):
$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$
3) classificare i punti stazionari in base al determinante $\det H_f(x,y) = f''_{xx}(x,y)\, f''_{yy}(x,y) - \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$ e all'elemento $f''_{xx}(x,y)$ [vedi Greenaggio pag. 381]

1) $\nabla f = \underline{0} \iff \begin{cases} 4y - 2xy - y^2 = 0 & \text{I} \\ 4x - x^2 - 2xy = 0 & \text{II} \end{cases}$

I: $y(4-2x-y) = 0 \;\begin{cases} \to y_1 = 0 \\ \to y_2 = 4 - 2x \end{cases}$

II: Sostituendo i valori y_1 e y_2 nella II abbiamo:

1
$$4x - x^2 - 0 = 0$$
$$x(4-x) = 0 \;\begin{cases} \to x_{11} = 0 \\ \to x_{12} = 4 \end{cases}$$
e abbiamo così trovato i punti stazionari:
$$(x_{11}, y_1) = (0,0)$$
$$(x_{12}, y_1) = (4,0)$$

2
$$4x - x^2 - 2x(4-2x) = 0$$
$$4x - x^2 - 8x + 4x^2 = 0$$
$$3x^2 - 4x = 0$$
$$x(3x-4) = 0 \;\begin{cases} \to x_{21} = 0 \\ \to x_{22} = \frac{4}{3} \end{cases}$$
Per trovare le corrispondenti ordinate

dobbiamo risostituire nella formula di y_2:

$$y_{21} = 4 - 2x_{21} = 4 - 0 = 4$$

$$y_{22} = 4 - 2x_{22} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

e abbiamo così trovato i punti stazionari:

$$(x_{21}, y_{21}) = (0, 4)$$

$$(x_{22}, y_{22}) = \cancel{(2,0)}\ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Riepilogando i p.ti staz. sono: ~~(0,0), (0,4), (2,0)~~
$(0,0), (4,0), (0,4), (4/3, 4/3)$.

2) Le derivate del II ordine nella matrice Hessiana sono:

$$f''_{xx}(x,y) = -2y$$

$$f''_{xy}(x,y) = 4 - 2x - 2y$$

$$f''_{yy}(x,y) = -2x$$

3) $\det H_f(x,y) = (-2y)(-2x) - (4-2x-2y)^2$

(1) $\det H_f(0,0) = 0 - (4-0)^2 = -16 < 0$
Quindi $(0,0)$ è punto di sella

(2) $\det H_f(0,4) = 0 - (4-0-8)^2 = -16 < 0$
Quindi $(0,4)$ è punto di sella

(3) $\det H_f(4,0) = 0 - (4-8-0)^2 = -16 < 0$
Quindi $(4,0)$ è punto di sella

(4) $\det H_f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3}\right)^2 =$

$$= \frac{64}{9} - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3} > 0$$

$$f''_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{3} < 0$$

Siccome $\det H_f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) > 0$ e $f''_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) < 0$ il punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ è un massimo relativo.

ES: 14.45 Determinare gli eventuali asintoti della funzione:

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 3x + 4$$

soggetta a vincolo:

$$g(x,y) = 2x + y - 1 = 0$$

Dal Teo. sui Moltiplicatori di Lagrange sappiamo che gli estremanti vincolati sono quelli che annullano il gradiente della funzione Lagrangiana $L(x,y,\lambda)$ per qualche valore del moltiplicatore di Lagrange λ:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 3x^2 + y^2 - 3x + 4 - \lambda(2x+y-1)$$

Annulliamo allora il gradiente della funzione Lagrangiana:

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \underline{0} = (0,0,0)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 6x - 3 - 2\lambda = 0 & \text{I} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y - \lambda = 0 & \text{II} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -(2x+y-1) = 0 & \text{III} \end{cases}$$

OSS: f, g sono continue, derivabili e con derivate parziali continue come richiesto dal Teorema.

$$\left.\begin{array}{l} \text{II}: \lambda = 2y \\ \text{III}: y = 1 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 2 - 4x$$

$$\Rightarrow \text{I}: 6x - 3 - 2(2-4x) = 0$$

$$14x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Da III: $2 \cdot \frac{1}{2} + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$

II: $2 \cdot 0 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ valore del moltiplicatore.

Andando ad effettuare qualche valutazione di $f(x,y)$ in punti del vincolo si può vedere che $(\frac{1}{2}, 0)$ è minimo ass.

ES: 14.51 Determinare gli eventuali estremanti di

$$f(x,y) = y - 4x$$

soggetta a vincolo:

$$\cancel{g(x,y)} = 6x^2+y^2 = 4$$

Il vincolo può essere riscritto come $g(x,y) = 6x^2+y^2-4=0$

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x,y,\lambda) = y-4x-\lambda(6x^2+y^2-4)$$

annulliamo il gradiente: $\nabla L = \underline{0}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -4-12\lambda x = 0 & \text{I} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1-2\lambda y = 0 & \text{II} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -6x^2-y^2+4 = 0 & \text{III} \end{cases}$$

OSS: f, g sono continue, derivabili e con derivate parziali continue.

II: $1 = 2\lambda y \iff \lambda = \dfrac{1}{2y}$

I: $-4-12\dfrac{1}{2y}x = 0 \iff 6\dfrac{x}{y} = -4 \iff y = -\dfrac{3}{2}x$

III: $-6x^2 - \left(-\dfrac{3}{2}x\right)^2 + 4 = 0$

$$-6x^2 - \frac{9}{4}x^2 + 4 = 0$$

$$\frac{24+9}{4}x^2 = 4 \iff x^2 = \frac{16}{33} \iff x = \pm\sqrt{\frac{16}{33}} = \pm 4\frac{1}{\sqrt{33}}$$

Troviamo i corrispondenti y e λ.

Da I: $y_1 = -\dfrac{3}{2}x_1 = -\dfrac{3}{2}\cdot\left(4\dfrac{1}{\sqrt{33}}\right) = -6\dfrac{1}{\sqrt{33}}$

II: $\lambda_1 = \dfrac{1}{2y_1} = -\dfrac{\sqrt{33}}{12}$

I: $y_2 = -\dfrac{3}{2}x_2 = -\dfrac{3}{2}\left(-4\dfrac{1}{\sqrt{33}}\right) = \dfrac{6}{\sqrt{33}}$

$\lambda_2 = \dfrac{1}{2y_2} = \dfrac{\sqrt{33}}{12}$.

I punti stazionari sono quindi:

$$(x_1, y_1) = \left(+4\frac{1}{\sqrt{33}}, -6\frac{1}{\sqrt{33}}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(-4\frac{1}{\sqrt{33}}, 6\frac{1}{\sqrt{33}}\right).$$

Sostituendo abbiamo: $z_1 = f(x_1, y_1) = y_1 - 4x_1 = -\frac{6}{\sqrt{33}} - \frac{16}{\sqrt{33}} =$

$$= -\frac{22}{\sqrt{33}}$$

$$z_2 = f(x_2, y_2) = y_2 - 4x_2 = \frac{6}{\sqrt{33}} + \frac{16}{\sqrt{33}} =$$

$$= \frac{22}{\sqrt{33}}$$

Essendo $z_1 < z_2$ abbiamo che (x_1, y_1) è un punto di minimo e (x_2, y_2) è un punto di massimo.