<u>ES</u>: 15.11 Scrivere $\underline{x} = (2,1,4)$ come combinazione lineare di $\underline{x}^1 = (2,1,0)$ e $\underline{x}^2 = (0,1,-1)$

Per definizione, $\underline{x}$ è combinazione lineare di $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$ se e solo se esistono λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{x}^1 + \lambda_2 \underline{x}^2$$

cioè: $(2,1,4) = \lambda_1 (2,1,0) + \lambda_2 (0,1,-1)$.

Per definizione di prodotto esterno per uno scalare:

$$(2,1,4) = (\lambda_1 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 0) + (\lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 1, \lambda_2 \cdot (-1))$$
$$= (2\lambda_1, \lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, -\lambda_2)$$

Per definizione della somma fra vettori abbiamo:

$$(2,1,4) = (2\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2)$$

A questo punto, due vettori sono uguali sse ogni rispettiva componente è uguale:

$$S: \begin{cases} 2 = 2\lambda_1 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 4 = -\lambda_2 \end{cases}$$

questo è un sistema lineare di 3 equazioni nelle due incognite λ_1 e λ_2: controlliamo che abbia soluzione. Abbiamo:

$$2 = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$4 = -\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -4$$

La II equazione $1 = \lambda_1 + \lambda_2$ non è soddisfatta con i valori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -4$, infatti

$$1 \neq 1 + (-4)$$

e quindi $\nexists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ soluzioni di S, cioè $\underline{x}$ non è combinazione lineare di $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$.

ES: 15.4 Stabilire se i vettori

$$\underline{x}^1 = (5,1,8)$$
$$\underline{x}^2 = (1,-2,-5)$$
$$\underline{x}^3 = (-7,3,2)$$

sono linearmente dipendenti, in base alla definizione.

⌈ RIC: $\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^m$ sono linearmente dipendenti sse
$\exists\ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq \underline{0}$ t.c.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underline{x}^i = \underline{0}$$

vettore nullo (cioè di zeri) ⌋

Quindi utilizziamo l'ultima equazione in $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ e verifichiamo che qualche λ_i sia non nullo:

$$\lambda_1(5,1,8) + \lambda_2(1,-2,-5) + \lambda_3(-7,3,2) = \underline{0}$$

Per definizione di prodotto esterno per uno scalare:

$$(5\lambda_1, \lambda_1, 8\lambda_1) + (\lambda_2, -2\lambda_2, -5\lambda_2) + (-7\lambda_3, 3\lambda_3, 2\lambda_3) = \underline{0}$$

e per definizione di somma fra vettori:

$$(5\lambda_1 + \lambda_2 - 7\lambda_3,\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3,\ 8\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3) = \underline{0} = (0,0,0)$$

Uguagliando componente per componente abbiamo:

$$S: \begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 & \text{I} \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & \text{II} \\ 8\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \text{III} \end{cases}$$

II: $\lambda_1 = 2\lambda_2 - 3\lambda_3$

$\Rightarrow$ I: $\lambda_2 = -5(2\lambda_2 - 3\lambda_3) + 7\lambda_3 = -10\lambda_2 + 15\lambda_3 + 7\lambda_3$

cioè: $11\lambda_2 = 22\lambda_3 \Rightarrow \lambda_2 = 2\lambda_3$

$\Rightarrow$ III: $8(2\lambda_2 - 3\lambda_3) - 5(2\lambda_3) + 2\lambda_3 = 0$

$16(2\lambda_3) - 24\lambda_3 - 10\lambda_3 + 2\lambda_3 = 0$

$32\lambda_3 - 32\lambda_3 = 0$ questa equazione equivale a $0=0$ che è soddisfatta $\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Ponendo per esempio $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 4-3 = 1$

Abbiamo cioè trovato una soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$(1, 2, 1) \neq \underline{0}$$

e quindi i vettori $\underline{X}^1, \underline{X}^2$ e $\underline{X}^3$ sono linearmente dipendenti.

<u>ES</u>: Calcolare il determinante della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A è quadrata di ordine 2.

det A si può quindi calcolare come

det A = prodotto degli elementi sulla diagonale + − prodotto degli elementi sulla controdiagonale.

Quindi:

$$\det A = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4$$

<u>ES</u>: Calcolare il determinante della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A è quadrata di ordine 3.

<u>REGOLA</u>: di Sarrus

Data la matrice A di ordine 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

consideriamo la matrice orlata $\tilde{A}$ ottenuta accostando la replica delle prime 2 colonne:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

matrice di ordine 3×5

$\det A$ si può allora calcolare come:

$$\det A = \frac{\text{somma dei prodotti delle diagonali}}{\text{somma dei prodotti delle controdiagonali}}.$$

cioè: $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Quindi il determinante della matrice data è:

$$\det A = (1\cdot1\cdot2 + 2\cdot1\cdot2 + 2\cdot1\cdot3) - (2\cdot1\cdot2 + 3\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot2) =$$
$$= 12 - 11 = 1.$$

ES: Calcolare il rango della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha ordine 2×3, quindi $rkA \leq \min\{2, 3\} = 2$, cioè il rango può essere 1 oppure 2.

Ricordiamo che il rango di una matrice è il più grande ordine delle sottomatrici quadrate con determinante non nullo.

Calcoliamo allora i determinanti delle sottomatrici di ordine 2 e verifichiamo che qualcuno non sia nullo:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A^{(1)} = 0 - 2 = -2 \quad \det A^{(2)} = 2 - 1 = 1 \quad \det A^{(3)} = 4 - 0 = 4$$

Siccome almeno uno di questi determinanti di sottomatrici di ordine 2 non è nullo $\Longrightarrow$

$$rkA \geq 2$$

e quindi $rkA = 2$.

<u>ES</u>: Calcolare l'inversa A^{-1} di A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che $\det A = 1 - 6 = -5 \neq 0$ quindi A è non singolare e invertibile.

L'inversa di una matrice A è la matrice dei complementi algebrici della sua trasposta (A^T) moltiplicata per lo scalare $\det A$.

1. Matrice trasposta:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matrice dei complementi algebrici ~~(o aggiunta)~~ di A^T (detta anche aggiunta di A : $\operatorname{agg} A$) ~~$\operatorname{agg} A^T =$~~

<u>RIC</u>: Data una matrice quadrata $B = [b_{ij}]$ il <u>complemento algebrico</u> dell'elemento b_{ij} della matrice B è il determinante della matrice ottenuta da B cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, moltiplicato per lo scalare $(-1)^{i+j}$.

$$\text{agg}\,A = \text{complemento algebrico di } A^T = \begin{bmatrix} \det[1] & -\det[3] \\ -\det[2] & \det[1] \end{bmatrix}$$

$$\text{agg}\,A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'inversa di A è quindi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{agg}\,A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

La correttezza è verificabile facilmente tramite la relazione: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ dove I è la matrice identità (diagonale di 1). Svolgiamo il prodotto

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} & -3 \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \\ 1 \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{5}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

che è uguale a I.

ES: 16.6 Calcolare il determinante della matrice:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Indicando con $B' = [b'_{ij}]$ la matrice dei complementi algebrici di B, ricordiamo il

TEO: di Laplace

Sia i un numero di riga o di colonna della matrice B; allora

$$\det B = \sum_j b_{ij}\, b'_{ij} = \sum_j b_{ji}\, b'_{ji}$$

Scegliamo per esempio la 3^a riga di B.
I complementi algebrici sono:

$$b'_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = (0-4+0)-(-12+3+0) = 5$$

$$b'_{32} = (-1)^{5} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -[(-4)-(-12+9)] = 1$$

$$b'_{33} = (-1)^{6} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = (4)-(12) = -8$$

$$b'_{34} = (-1)^{7} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = -[(12)-(36)] = +24$$

cosicché:

$$\det B = 2 \cdot b'_{31} + 0 \cdot b'_{32} + 0 \cdot b'_{33} + 1 \cdot b_{34} =$$
$$= 2 \cdot 5 + 0 + 0 + 1 \cdot (+24) = +34.$$

ES: Determinare il numero di soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Il sistema si può rappresentare in forma matriciale come $A\underline{x} = \underline{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

RIC: Teorema di Rouché-Capelli
Un sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ ammette soluzioni sse $rk(A \vdots \underline{b}) = rk(A)$.
Inoltre in tal caso il numero ~~delle~~ di soluzioni del sistema è
$$\begin{cases} 1 & \text{se } rk(A) = n \\ \infty^{n-rk(A)} & \text{se } rk(A) < n \end{cases}$$
dove n è il numero di variabili in $\underline{x}$.

Abbiamo $\det A = (-6-2+4)-(3+8+2) = -17$.
Essendo $\det A \neq 0$ ed essendo A quadrata di ordine $n=3$, il rango di A è $rk(A) = 3$.

Deve essere inoltre $rk(A \vdots \underline{b}) \leq \min\{3, 3+1\} = 3$ e $rk(A \vdots \underline{b}) \geq rk(A)$, quindi abbiamo $rk(A \vdots \underline{b}) = 3 = rk(A)$ e il Teo. di Rouché-Capelli ci dice che esiste un'unica soluzione