10/10/12 ESERCITAZIONI DI MATEMATICA (E.C.E.)

ES 4.23 v)

$$\log|x+3| - \log(x+1) \geq 0$$

Applichiamo la proprietà di additività del logaritmo:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \forall\, x, y > 0$$

ottenendo:

$$\log \frac{|x+3|}{x+1} \geq 0 = \log 1$$

Siccome $\log(\cdot)$ è funzione strettamente crescente abbiamo:

$$\frac{|x+3|}{x+1} \geq 1 \iff \frac{|x+3|}{x+1} - 1 \geq 0$$

cioè $$\frac{|x+3| - x - 1}{x+1} \geq 0$$

In generale, quando è presente il modulo $|A|$ di un'espressione A bisogna distinguere in 2 casi:

HYP1: $A \geq 0$

HYP2: $A < 0$

risolvere il problema nei due casi ed unire le soluzioni.

HYP1: $x+3 \geq 0 \iff x \geq -3 \implies |x+3| = x+3$

La disuguaglianza si può riscrivere come:

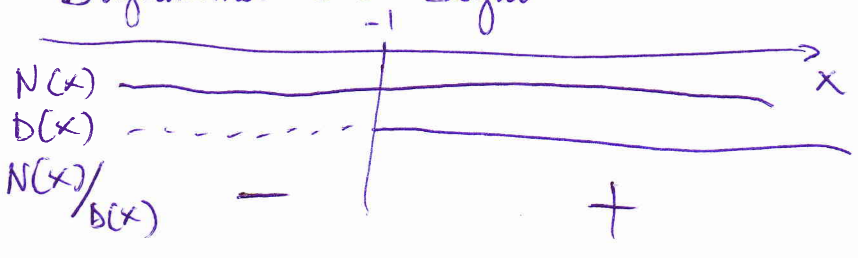
$$\frac{x+3-x-1}{x+1} \geq 0 \iff \frac{2}{x+1} \geq 0$$

[condizioni esistenza $x \neq -1$]

$N(x) = 2$ positivo $\forall x$

$$D(x) = x+1 = \begin{cases} \text{positivo} & \text{per } x > -1 \\ \text{negativo} & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

Diagramma dei Segni



$x > -1$

Le soluzioni candidate $x \geq -1$ soddisfano l'ipotesi HYP1 quindi sono le soluzioni effettive del caso HYP1.

HYP2: $x+3<0 \iff x<-3 \implies |x+3| = -x-3$

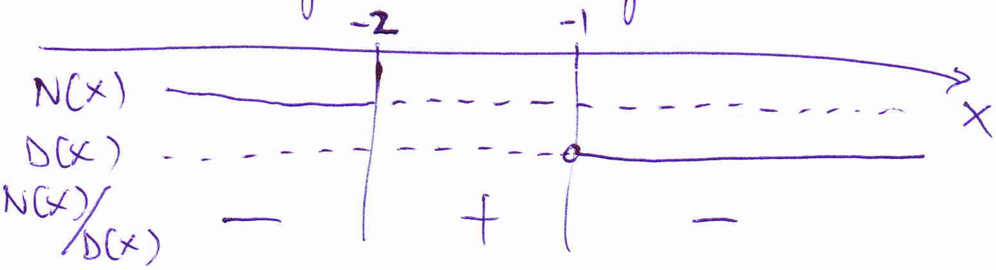
La disuguaglianza si può riscrivere come:

$$\frac{-x-3-x-1}{x+1} \geq 0 \iff \frac{-2x-4}{x+1} \geq 0 \qquad \left[\begin{array}{l} \text{C. E.} \\ x \neq -1 \end{array}\right]$$

$$N(x) = -2x-4 = \begin{cases} \text{positivo} & \cdot \text{ per } x<-2 \\ \text{nullo} & \cdot \text{ per } x=-2 \\ \text{negativo} & \cdot \text{ per } x>-2 \end{cases}$$

$$D(x) = x+1 = \begin{cases} \text{positivo} & \cdot \text{ per } x>-1 \\ \text{negativo} & \cdot \text{ per } x<-1 \end{cases}$$

Diagramma dei Segni



Quindi $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$ quando $-2 \leq x < -1$, ma tutte queste soluzioni candidate non soddisfano l'ipotesi HYP2, quindi il caso HYP2 non ammette soluzioni.

$\therefore$ In conclusione le soluzioni dell'esercizio sono quelle del caso HYP1: $\boxed{x \geq -1}$

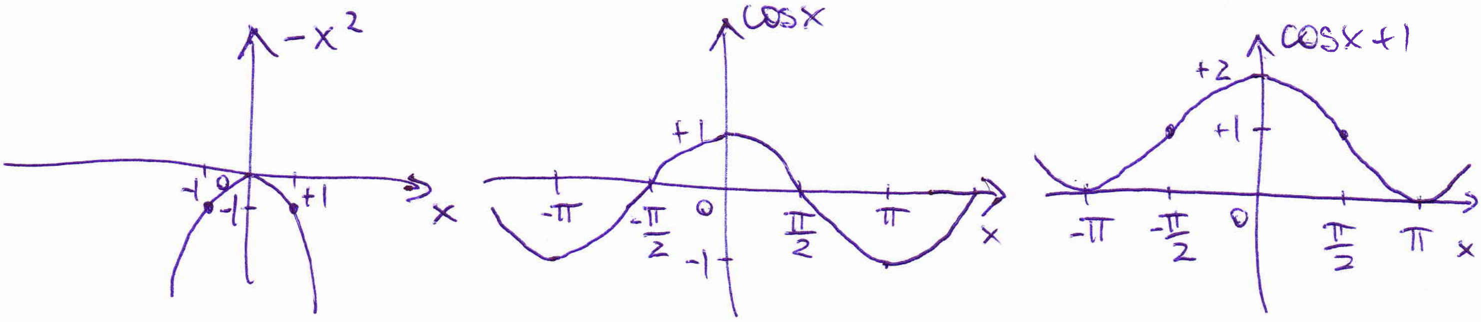
<u>ES:</u> Determinare graficamente le soluzioni di:

$$x^2 + \cos x + 1 \geq 0$$

<u>OSS:</u> x compare nella funzione quadratica e nel coseno: è utile separare le due funzioni in due membri della disuguaglianza.

$$-x^2 \leq \cos x + 1$$

Il membro a sinistra $-x^2$ è una parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice nell'origine.
Il grafico di $\cos x + 1$ è pari a quello di $\cos x$ traslato in alto di 1 unità.



Dal confronto del grafico di $-x^2$ con quello di $\cos x + 1$ risulta che $-x^2$ è sempre minore di $\cos x + 1$, quindi la disuguaglianza è identicamente verificata:

$$x^2 + \cos x + 1 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ES: 6.5 $\quad \lim_{n \to +\infty} n \cos n - n^2 = ?$

Sappiamo che $-1 \leq \cos n \leq +1$, in particolare $\cos n \leq +1$.
Perciò per valori positivi di n abbiamo:

$$n \cos n \leq n$$

e quindi la funzione $f(n) := n \cos n - n^2$ soddisfa:

$$f(n) = n \cos n - n^2 \leq n - n^2 =: g(n)$$

Siccome $f(n) \leq g(n)$ e $\cancel{g(n) = n - n^2}$ $\lim_{n \to +\infty} n - n^2 = -\infty$ per il Teo. del confronto deve essere $\lim_{n \to +\infty} f(n) = -\infty$.

ES: 7.19 III) $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} = ?$

Possiamo applicare l'utile Teorema di pag. 161 del testo di Guenaggio che in breve recita:

TEO.: $\lim_{x\to P} \frac{f(x)}{F(x)} = 0$ e $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{G(x)} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to P} \frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)} = \lim_{x\to P} \frac{F(x)}{G(x)}$$

Identificando le funzioni: $F(x) = x\sqrt{x}$, $f(x) = 0$
$G(x) = x^2$, $g(x) = 1$

otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per il TEO.}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per cancellazione di } x \text{ a} \\ \text{numeratore e denominatore.}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Ora, $\sqrt{x}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a x, quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

e dalla catena di uguaglianze abbiamo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} = 0$.

ES: 7.20 I) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\log x^5} + \frac{x^3}{e^x}\right) = ?$

Siccome $\lim(f+g) = (\lim f) + (\lim g)$ (TEO. pag. 156 del Guerraggio, punto a.):

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\log x^5} + \frac{x^3}{e^x}\right] = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x^5}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}}_{\mathrm{II}}$$

I Per la gerarchia degli infiniti sappiamo: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\log x)^b} = +\infty \quad \forall a, b>0$

Dobbiamo quindi ricondurre I a tale forma:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x^5} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per una nota proprietà} \\ \text{del logaritmo}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{5\log x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siccome } \lim c\cdot f(x) = c\cdot \lim f(x)}}{=} \frac{1}{5} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty$$

II Per la gerarchia degli infiniti sappiamo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \quad \forall a > 0$

Quindi: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

I + II $= +\infty + 0 = +\infty$, quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\log x^5} + \frac{x^3}{e^x} \right) = +\infty$$