Quanti denti ha un ingranaggio?

Daniele Marini

Dipartimento di Informatica e Comunicazione

I materiali per il calcolo

- In passato erano il bronzo, l'ottone, il legno, non il silicio
  - Antikythera
  - Astrario del Dondi
  - La Pascalina
  - La macchina di Babbage
  - La macchina di Vannevar Bush
- Ecco l'importanza degli ingranaggi nella storia del calcolo
- Qual'è l'importanza del calcolo nella storia degli ingranaggi?

Numeri di Fibonacci

- Divakar Viswanath (univ. di Chicago) studia i numeri di Fibonacci "randomizzati"
  - $Fib_0=0$, $Fib_1=1$,
  - $Fib_n=Fib_{n-1}+Fib_{n-2}$
- 1,1,2,3,5,8,13,…
- Nella serie randomizzata ("Vibonacci") si sceglie a caso la somma o la sottrazione
- Ci si può aspettare che i valori si annullino l'un l'altro, V. dimostra che i termini crescono stabilmente in valore assoluto

Albero di Stern-Brocot [1]

- V. fa uso della struttura chiamata "**albero di Stern-Brocot**"
- Presi due numeri razionali della forma

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d}$$

- Si inserisce tra i due un terzo valore chiamato "**mediante**":

$$\frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{2}{3},\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2+3}{3+4}=\frac{5}{7}$$

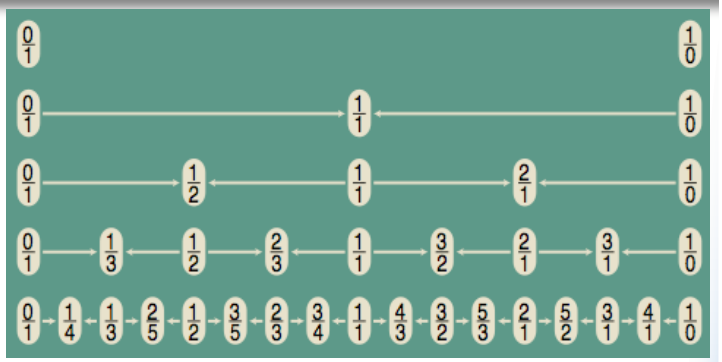
Albero di Stern-Brocot 2

- Si prosegue costruendo un albero, al livello successivo avrà 5 elementi
- Ad ogni livello gli elementi sono ordinati
- L'albero canonico di Stern-Brocot parte con i numeri

$$\frac{0}{1} \text{ e } \frac{1}{0}$$

Albero di Stern-Brocot 3

- Il termine 1/0 è anomalo, si interpreta come ∞ ridotto ai minimi termini.



- Al secondo livello l'albero è

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0}$$

- Al terzo: $\frac{1}{0}\frac{1}{2}\frac{1}{1}\frac{2}{1}\frac{1}{0}$

Il professore e l'orologiaio

- Moritz Abraham Stern (1807–1894), collega di Gauss, gli succede alla cattedra all'Università di Göttingen (il primo ebreo professore in Germania)
- Achille Brocot, orologiaio francese (1817–1878), inventore dello *scappamento di Brocot* e di una *sospensione del pendolo* che semplifica la regolazione del passo.

Che c'entra un orologiaio?

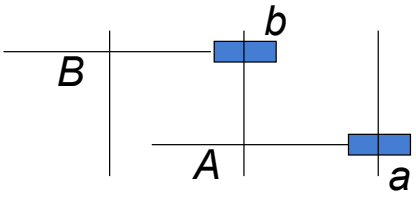
- Si abbia un asse che compie 1 giro al minuto (muove la lancetta dei secondi)
- Si voglia ridurre la velocità a 1 giro per giorno (muovere una lancetta che indica l'ora in 24-esimi)
- Il rapporto di velocità è 1:14.400 (60*24)
- Ricordiamo che la velocità di un ingranaggio è inversamente proporzionale al numero dei denti

Che ingranaggio scegliere?

- Non ha senso un ingranaggio con un solo dente
- Si può risolvere il problema immaginando un pignone con 10 denti e una ruota con 144.000 denti: troppi!
- Occorre costruire un *treno* di ingranaggi di demoltiplicazione.

Un treno a due stadi

- Il pignone *a* ingrana la ruota *A*, il pignone *b*, solidale con la ruota *A*, ingrana la ruota *B*



- La catena di rapporti è $a/A \times b/B$
- Es: $\frac{6}{200} \times \frac{5}{216} \Rightarrow \frac{30}{43200} \Rightarrow \frac{1}{14400}$

Un treno a tre stadi

- 200 e 216 denti sono ancora troppi, gli orologiai al massimo arrivano a 120-130 denti
- Il treno: 6/72, 6/70, 5/60 risolve il problema (trascuriamo l'inversione della rotazione)
- Ma come trovare questi numeri?
- Mediante la **fattorizzazione**

Fattorizzazione

- Il rapporto 30/43200 si scompone in fattori:
- Numeratore 2x3x5
- Denominatore 2x2x2x2x2x2 x 3x3x3 x 5x5
- Il numeratore si può raggruppare in tre modi: 6x5, 10x3, 2x15
- Il denominatore si può raggruppare in 41 modi!

La tabella di Brocot

- H.E. Merrit nel 1947 pubblica *Gear trains: including a Brocot table of decimal equivalents and a table of Brocot of all useful numbers up to 200.000*
- I numeri sono *utili* in quanto il massimo fattore primo non è superiore a 127, vicino al numero limite dei denti di un ingranaggio

Progettare ingranaggi

- Convertire minuti in giorni appare semplice
- Ma se il rapporto tra due ingranaggi fosse π?
- O se comunque uno o entrambi i termini fosse non fattorizzabile (primo)?

La soluzione di Brocot 1

- Un vero e proprio algoritmo
- Esempio
  - Una ruota compie un giro in 23'
  - guida una ruota che compie un giro in 3h e 11', ovvero 191'
  - entrambi sono numeri primi
  - Occorre trovare la migliore approssimazione, ovvero quella che rende minimo il ritardo o l'anticipo.

La soluzione di Brocot 2

- $8 < 191/23 < 9$ quindi il rapporto cercato deve stare tra 8:1 e 9:1
- Il rapporto 8:1 = 184/23; rispetto a 191/23 da un errore di -7, l'ingranaggio è in anticipo di 7 minuti
- Il rapporto 9:1 = 207/23; rispetto a 191/23 da un errore di 16, l'ingranaggio è in ritardo di 16 minuti

La soluzione di Brocot 3

- Si costruisce iterativamente una tabella di *medianti*

8	1	-7	
33	4	-5	
58	7	-3	
83	10	-1	1/10’ di ritardo
191	23	0	
108	13	+1	1/13’ di anticipo
25	3	+2	
17	2	+9	(9/2 = 4.5’)
9	1	+16	

Riduciamo l’errore

- L’approssimazione migliore è 83/10 o 108/13
- Per ridurre l’errore occorre aumentare il numero di ingranaggi e ripetere il calcolo

Un nuovo ingranaggio

83	10	-1
274	33	-1
465	56	-1
656	79	-1
.....		
191	23	0

- Tra queste sequenze bisogna trovarne una fattorizzabile, la terza da ad esempio 5/7 x 93/8 con un errore di ritardo di 1/56' circa 1 secondo

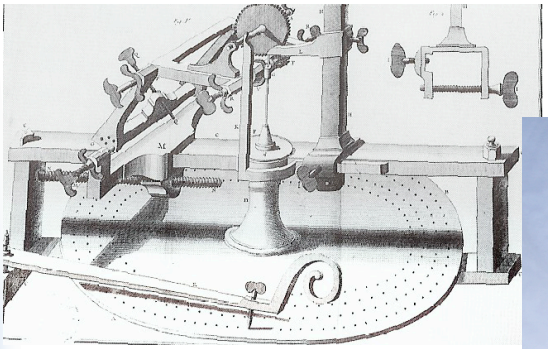
La tavola di Merrit

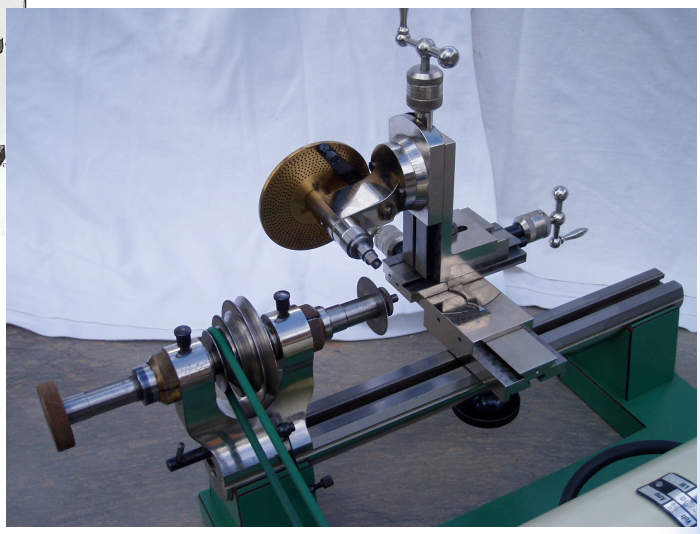
- La tavola presentata da Merrit nel 1947 non è altro che una tabella di Brocot, una lista di frazioni con numeratore e denominatore ≤ 100, ordinate per valore

L'orologiaio e il professore

- Non risulta che Stern e Brocot si conoscessero
- Essi sviluppano lo stesso concetto partendo da punti di vista diversi e con metodi differenti, ma giungono alle stesse conclusioni
- L'algoritmo di Brocot può servire per calcolare approssimazioni di qualunque rapporto non razionale, ad esempio la sezione aurea.

Macchine per fresare ingranaggi





Ringraziamenti

- Questa presentazione è tratta da:

Bryan Hayes, *On the Teeth of Wheels*, American Scientist, vol.88, n.4 pp 296-300, (2000)