LIVRES

Prediction, Learning, and Games
NICOLÒ CESA-BIANCHI, GÁBOR LUGOSI
Cambridge University Press, 2006. 406 p.
ISBN : 0-521-84108-9. $ 65

Cet ouvrage dresse l'état de l'art dans un domaine de recherche en pleine expansion, à la croisée des chemins de la théorie de l'apprentissage, de la statistique, de la théorie des jeux et de celle de l'information ; il présente également quelques points de vue ou résultats nouveaux. Le spectre des applications considérées (ou des applications potentielles) est large, de la compression de données à l'investissement dans le marché boursier, en passant par la reconnaissance de formes.

L'exposé se concentre sur différentes variantes d'un problème générique de prédiction séquentielle, dont voici un énoncé, tiré de l'introduction d'un article de revue, en français, écrit par Gábor Lugosi pour le *Journal de la Société Française de Statistique* (et traduit par mes soins). Dans la version la plus simple de ce problème, le prévisionniste observe, l'un après l'autre, les éléments d'une suite $y_1, y_2, \ldots$ de symboles (à valeurs dans un ensemble donné, fini ou infini). À chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, avant que le t-ième symbole de la suite ne soit dévoilé, le pronostiqueur essaie de deviner sa valeur y_t en se fondant sur les $t - 1$ observations précédentes.

Dans la théorie statistique de l'estimation séquentielle, on suppose classiquement que les éléments de $y_1, y_2, \ldots$ sont les réalisations d'un certain processus stochastique (par exemple, stationnaire). Il s'agit alors d'estimer les caractéristiques de ce processus ; on en déduit ensuite des règles de prédiction efficaces. Dans un tel contexte, le risque d'une règle de prédiction peut être défini comme l'espérance d'une certaine fonction de perte mesurant l'écart entre la valeur prédite et le vrai résultat ; on compare différentes règles *via* le comportement de leurs risques.

On abandonne ici cette hypothèse essentielle de génération des résultats par un processus stochastique sous-jacent, et on voit la suite $y_1, y_2, \ldots$ comme le produit d'un certain mécanisme, inconnu, non spécifié (et qui pourrait être déterministe, stochastique, ou même dynamique et antagoniste). On appelle souvent cette approche prédiction de suites individuelles, pour l'opposer à celle qui procède par une modélisation stochastique préliminaire. Sans modèle probabiliste, on ne peut toutefois pas définir de notion de risque, et fixer les objectifs de la prédiction n'est pas de toute évidence.

Dans une présentation très simplifiée du modèle de prédiction randomisé étudié aux chapitres 4 à 7 de ce livre, le pronostiqueur choisit à chaque pas une action $i \in \{1, \ldots, N\}$ parmi N actions, et lorsque le résultat est y_t, il essuie une perte $\ell(i, y_t)$ où ℓ est une certaine fonction de perte, à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. La performance de sa stratégie est comparée à celle du meilleur pronostiqueur "constant", c'est-à-dire, à celle de l'action fixe i qui, parmi toutes les autres, obtient la moindre perte cumulée lors des n tours de prédiction. On appelle regret la différence entre la perte cumulée du pronostiqueur et celle d'une action constante, simplement parce qu'il mesure combien le pronostiqueur regrette, rétrospectivement, de ne pas avoir suivi cette action précise. Ainsi, il cherche à commettre (presqu') aussi peu d'erreurs que la meilleure stratégie constante. Son idéal est que son regret, rapporté au nombre de pas du problème, converge vers zéro.

Comme la suite des résultats est complètement arbitraire, il est immédiat que pour toute stratégie de prédiction déterministe, il existe une suite de résultats $y_1, \ldots, y_n$ telle que le pronostiqueur ait choisi à chaque tour l'action la pire ; aucune borne sensée ne peut donc être obtenue sur le regret d'une telle stratégie. Cela peut paraître étonnant, mais dès qu'on autorise le pronostiqueur à recourir au hasard (c'est-à-dire qu'il peut lancer une pièce avant de former sa prédiction), la situation change du tout au tout ; l'introduction d'un aléa dans le choix final est un outil extrêmement puissant.

Ainsi, parce que l'on joue contre un adversaire potentiellement dynamique et antagoniste, le caractère stochastique qui n'apparaissait pas dans la détermination de la suite d'éléments à prédire se retrouve dans la stratégie du prévisionniste.

La première mention des problèmes de prédiction randomisée de suites arbitraires remonte aux années 50, et plus précisément aux travaux de Hannan (1957) et Blackwell (1956), qui ont formulé leurs résultats dans un cadre nommé « problèmes de décisions multiples séquentielles ». Cover (1965) figure également parmi les pionniers du domaine ; en 1991, il a proposé un algorithme d'investissement dans le marché boursier lié aux techniques de suites individuelles. Le problème de la prédiction séquentielle, tel que démuni de toute hypothèse de nature probabiliste, est intimement lié à la compression de suites individuelles de données en théorie de l'information. Les recherches d'avant-garde dans ce domaine ont été menées par Ziv (1978, 1980) et Lempel et Ziv (1976, 1977) ; ils ont résolu la question de compresser une suite individuelle de données presqu'aussi bien que le meilleur automate fini. Le paradigme de la prédiction de suites individuelles a été étudié également en théorie de l'apprentissage, où Littlestone et Warmuth (1994) et Vovk (1990) ont introduit le problème.

Cependant, jusqu'au milieu des années 90, les développements se sont effectués de manière parallèle dans ces disciplines, et les chercheurs des différentes communautés ont alors réalisé qu'ils avaient beaucoup à apprendre les uns des autres. Des articles de recension et de mise en perspective (Feder, Merhav et Gutman, 1992, Foster et Vohra, 1999) et des livres de synthèse (Fudenberg et Levine, 1998) ont jeté les premiers ponts. En 2001, Gábor Lugosi a donné une série de cours à l'IHP, dans le cadre d'un semestre de statistique, à propos de la prédiction de suites individuelles.

Les notes de ces cours ont été le premier jet de ce livre, dont la clarté d'exposition doit ainsi autant à la confrontation avec des étudiants (dont l'auteur de cette recension, pendant son DEA et sa thèse) qu'aux qualités personnelles des auteurs (les deux précédents ouvrages de Gábor Lugosi, *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition* et *Combinatorial Methods in Density Estimation*, ont été et sont encore de véritables *best-sellers*).

Avant de décrire plus en détail le contenu mathématique du livre, on s'arrêtera sur la couverture, inspirée par la broderie *Venti cinque per venti cinque...* d'Alighiero Boetti, et sur l'organisation formelle de l'ouvrage, en douze chapitres et un appendice. À l'intérieur d'un chapitre, tous les résultats sont prouvés et discutés ; la lecture est rendue fluide par le regroupement à la fin du chapitre des remarques et crédits bibliographiques ; enfin, une série d'une vingtaine d'exercices, dont la moitié indique sans les prouver des extensions plus ou moins immédiates de résultats prouvés dans le livre, clôt chaque chapitre. Tout au long du manuscrit, les algorithmes et stratégies de prédiction sont mis en valeur et formulés dans des encadrés, ce qui facilite la lecture et l'analyse ; par ailleurs, les premiers chapitres contiennent quelques illustrations. On peut regretter l'énoncé théorique des méthodes sans validation pratique ou illustration sur des données réelles de leur efficacité ou pertinence ; cependant, les remarques bibliographiques indiquent les articles dans lesquels ces études ont été conduites. Il faut noter également que les auteurs mettent régulièrement à jour sur leur site une table des errata.

Le chapitre 1 est une brève introduction historique et il présente un cas d'école. Les chapitres 2 et 3 s'intéressent à la prédiction avec avis d'experts à disposition : il s'agit de méta-apprentissage ; on dispose d'un nombre N de stratégies de prédiction fondamentales et on cherche à les combiner efficacement d'une manière séquentielle. Les chapitres 4, 5 et 6 portent sur la prédiction randomisée lorsque soit la classe d'experts de comparaison est très grande mais structurée, soit le retour sur prédiction est peu informatif (on n'accède pas à y_t, mais à une version dégradée, par exemple seulement la perte de l'action jouée). Le chapitre 7 constitue une mise en perspective et une extension des résultats précédents au cadre de la théorie des jeux, i.e., quand plusieurs joueurs mettent en œuvre des stratégies de suites individuelles les uns face aux autres. Les chapitres 8, 9 et 10 s'arrêtent sur deux fonctions de perte particulières, la fonction valeur absolue (avec laquelle on établit au chapitre 8 des résultats théoriques d'optimalité, en exhibant des bornes inférieures sur le regret) et la fonction de perte logarithmique, utilisée aussi bien en théorie de l'information pour compresser des données (chapitre 9) que dans le cadre de l'investissement dans le marché boursier (chapitre 10). Enfin, le livre se clôt sur deux problèmes d'apprentissage, la reconnaissance linéaire de formes (et notamment, le cas particulier de la régression linéaire séquentielle au sens des moindres carrés, chapitre 11) et la classification linéaire (chapitre 12).

Même si l'ouvrage s'adresse à un public de chercheurs ou de futurs chercheurs, il ne demande que très peu de pré-requis. Aucune notion poussée de probabilités n'est mobilisée (un niveau M1 suffit largement) ; les preuves d'ailleurs sont souvent assez simples, et requièrent plus d'idées que de technique.

En conclusion, je ne saurais que vous recommander cette synthèse remarquable et enthousiaste d'un domaine en plein essor, qui se lit et s'apprécie comme un roman de la rentrée littéraire. C'est déjà lui aussi un succès de librairie, et des groupes de travail se montent à divers endroits, notamment à Berkeley, pour l'étudier. Pour une présentation plus vivante, je vous invite à venir écouter les auteurs, qui seront professeurs invités à l'Ecole normale supérieure en février 2007 et donneront une série de cours à propos de *Prediction, Learning, and Games*.

Gilles Stoltz,
École Normale Supérieure

La quadrature du cercle, Un problème à la mesure des lumières
M. Jacob
Fayard, 2006. 571 p. ISBN : 2-213-62860-2. 39 €

La quadrature du cercle est la construction, à la règle et au compas, d'un carré ayant la même aire qu'un cercle donné. Le problème date de l'Antiquité grecque, mais l'impossibilité de la quadrature du cercle n'est vraiment établie qu'en 1882 lorsque Lindemann démontre la transcendance du nombre π.

Avant cette date, des mathématiciens, mais surtout des amateurs, ont tenté d'apporter une réponse au problème en proposant des preuves de la possibilité ou de l'impossibilité de la quadrature. Au 18^{e} siècle, l'engouement pour le problème est tel qu'il se traduit par un foisonnement d'écrits de toutes sortes : mémoires, articles, brochures, prospectus, livres de synthèse. Cela explique pourquoi le siècle des lumières est la période retenue par Marie Jacob pour son étude concernant la quadrature du cercle.

Le sujet est traité dans le livre, en sept chapitres, sous trois éclairages différents.

– Les deux premiers chapitres traitent de l'aspect sociologique. On y trouve en particulier une typologie des quadrateurs.

– Les trois chapitres suivants concernent les mathématiques mises en jeu, les différents types de démonstrations, les résultats importants et les erreurs rencontrées.

– Les deux derniers chapitres sont consacrés à l'Académie et aux savants. On y trouve en particulier l'analyse des raisons qui ont conduit l'Académie en 1775 à ne plus accepter les articles concernant la quadrature du cercle.

Dans le livre, quand on parle d'Académie, il s'agit de l'Académie royale des Sciences de Paris. Le mot « savant » s'applique aux académiciens et à leurs proches, alors que le mot « quadrateur », utilisé sans connotation péjorative, concerne ceux qui sans être nécessairement scientifiques, ont écrit sur la quadrature du cercle.

Il suffit de se reporter à l'index, à la fin de l'ouvrage, où l'on trouve la liste des quadrateurs recensés, ou à la bibliographie, pour réaliser l'immense travail accompli pour l'écriture de ce livre. Les sources principales de documentation sont « Histoire et Mémoires de l'Académie royale des Sciences », ouvrage imprimé chaque année, qui donne une image officielle des travaux de l'Académie, ainsi que les procès-verbaux manuscrits établis à chaque séance de l'Académie, accompagnés de lettres, mémoires et commentaires inédits. Il faut également mentionner certains périodiques comme par exemple *Acta eruditorum*, le Journal des Savants ou les Mémoires de Trévoux.

Au début de son étude, Marie Jacob analyse le livre de Jean-Etienne Montucla paru en 1754 sous le titre « Histoire des recherches sur la quadrature du cercle ». On y trouve les approximations de π obtenues par des polygones inscrits et circonscrits au cercle : 22/7 par Archimède, 355/113 par Métius et les 36 chiffres significatifs obtenus par Ludolph Van Ceulen. On y trouve aussi la formule de Machin, $\frac{\pi}{4} = 4\, \mathit{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathit{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$ et les 127 décimales exactes obtenues en 1719 par Lagny qui utilise les nouveaux calculs de développement en série et d'intégration. Dans son livre, Montucla n'est pas tendre au sujet des quadrateurs traités de « vulgaires ignorants » et de « ridicules auteurs de quadrature du cercle ». Le livre de Marie Jacob s'inscrit dans la lignée de celui de Montucla, mais elle trouve que l'approche de Montucla, trop partielle, donne une vision inexacte de la population des quadrateurs. Marie Jacob a recensé plus de 150 quadrateurs à partir desquels elle propose une typologie suivant la profession, la motivation, le niveau des mathématiques utilisées et les erreurs rencontrées. On y trouve une grande diversité tant au niveau des connaissances intellectuelles qu'au niveau social. Un quart des quadrateurs sont des savants (médecins, professeurs, ingénieurs), un quart est composé de religieux, le reste s'équilibre entre juristes, militaires, arpenteurs, négociants et artisans. La motivation principale des quadrateurs semble être la recherche de la gloire personnelle et de la renommée, mais on trouve aussi l'appât du gain car certaines personnes pensaient qu'il y avait un prix attaché à la découverte de la quadrature du cercle. Cette croyance a été entretenue par la confusion entre le problème de la quadrature du cercle et celui de l'amélioration de la détermination des longitudes en mer pour lequel un prix avait bien été créé en Hollande, en Angleterre et ensuite en France en 1720.

Pour donner plus de vie à son étude, Marie Jacob a eu l'excellente idée d'extraire de sa liste de quadrateurs quelques personnages dont elle brosse le portrait avec tout le talent d'une romancière. On découvrira donc le Père Lemuet qui, après avoir annoncé sa quadrature dans le Journal de Verdun, la défendit dans le même Journal pendant plusieurs années, jusqu'à un avis défavorable de l'Académie sur son travail. Il changea alors de Journal et utilisa le Mercure de France. On suivra le professeur de philosophie Basselin pendant presque dix ans dans ses démêlés avec l'académicien Clairaut qui réfute de façon polie mais ferme la quadrature du professeur. On sera surpris par le médecin Mathulon qui dépose chez un notaire lyonnais la somme de 3125 louis d'or à remettre à qui démontrera dans le Journal des Savants que « ledit Mathulon a donné dans l'erreur au sujet de la quadrature du cercle ». C'est l'académicien Nicole qui relèvera le défi. Sur décision de justice, la somme promise sera remise à l'Hôtel-Dieu de Lyon. On lira aussi avec autant de plaisir les aventures de Liger, De la Frainaye et autre Vausenville. Mais le récit le plus romanesque concerne le Chevalier de Causans qui inondera pendant plus de sept ans l'Académie de lettres et de manuscrits et qui publiera nombre de mémoires et prospectus.

Dans la deuxième partie de son livre, Marie Jacob analyse de nombreuses études sur la quadrature. Les démonstrations, souvent accompagnées de figures, sont données avec beaucoup de détails et les erreurs ou paralogismes sont signalés. Les méthodes utilisées reposent souvent sur la géométrie d'Euclide. Elles s'inspirent alors des polygones d'Archimède ou des lunules d'Hippocrate. Elles utilisent parfois de la géométrie dans l'espace en évaluant des volumes obtenus à l'aide de sphères ou de paraboloïdes. Moins élémentaires sont les méthodes qui utilisent le nouveau calcul, le calcul infinitésimal introduit par Newton et Leibnitz.

Concernant les erreurs rencontrées, la plus courante est la confusion entre quadrature exacte et quadrature approchée qui assimile le nombre π avec une de ses approximations. On trouve aussi des erreurs résultant de l'usage de l'infini, en considérant par exemple un cercle comme un polygone ayant une infinité de côtés ou en utilisant l'infini avec une connotation métaphysique et cela malgré l'avis de Fontenelle : « l'infini métaphysique ne peut s'appliquer ni aux nombres ni à l'étendue ». Il y a aussi parfois, comme chez le philosophe polonais Hanovius, une conception atomiste de la notion de point géométrique qui nie la disposition continue des points d'une courbe. Il y a enfin un manque de maîtrise dans l'usage du calcul infinitésimal.

Un problème logiquement équivalent à la quadrature du cercle est celui de « la circulature du carré » : Construire, à la règle et au compas, un cercle ayant le même périmètre qu'un carré donné. En 1640 Descartes trouva une élégante construction géométrique qui conduit à une approximation du diamètre du cercle cherché. La démonstration de Descartes n'étant pas détaillée, Euler reprend le problème en 1763. Sa preuve et ses corollaires figurent dans le livre de Marie Jacob. On y trouve en particulier la formule : $\frac{4}{\pi} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} tan\left(\frac{\pi}{2^{p+2}}\right)$.

Dans le livre figure aussi en bonne place le résultat théorique le plus important obtenu au 18e siècle sur la quadrature du cercle, à savoir, l'irrationalité du nombre π. Jean-Henri Lambert démontre le résultat dans un mémoire de 1767 en utilisant le développement en fraction continue de la fonction tangente. Il obtient en fait, plus généralement que pour $\theta \neq 0$, $tan(\theta)$ rationnel équivaut à θ irrationnel. Il y eut, à l'époque, peu d'écho pour ce résultat. On peut penser que la haute technicité de sa démonstration était incompréhensible au commun des savants. Ce résultat est pourtant une première étape vers l'impossibilité de la quadrature. Il sera complété en 1794 par Legendre qui établit que π^2 est aussi irrationnel, mais il faudra attendre 1882 pour obtenir avec Lindemann la transcendance de π.

La dernière partie de l'ouvrage de Marie Jacob est consacrée à l'Académie. On y trouve en particulier l'analyse des raisons qui ont conduit les académiciens en 1775 à prendre la décision « de ne recevoir, ni examiner aucun mémoire qui ait pour objet la quadrature du cercle ». Ces derniers chapitres sont aussi l'occasion de nous familiariser avec le fonctionnement de l'Académie. On y retrouve des mathématiciens bien connus comme d'Alembert, Bézout, Clairaut, Vandermonde, on en découvre d'autres comme Nicole ou Jeaurat qui ont fait preuve de beaucoup de patience et de pédagogie dans leur travail de rapporteurs sur les mémoires adressés à l'Académie. On peut lire aussi quelques extraits des rapports des académiciens. Par exemple de Clairaut et Montigny : « Il nous donne à choisir de deux choses l'une : ou bien qu'il a trouvé la quadrature du cercle, ou qu'Archimède et tous les géomètres qui l'ont suivi se sont trompés » ; ou bien de d'Alembert : « J'ai examiné cet écrit, qui ne vaut rien ».

Avant de conclure, signalons que la très belle figure en couleurs qui illustre la couverture du livre de Marie Jacob est extraite du mémoire que De Mean adressa à l'Académie en 1738. L'auteur découpe le cercle en lunules à partir desquelles il reconstitue « presque » un rectangle. Cela fournit une quadrature approchée qui fut approuvée par l'Académie.

La lecture du livre est facilitée grâce aux notes renvoyées à la fin de chaque chapitre et aux démonstrations précises accompagnées de figures claires. Le livre s'adresse bien sûr aux spécialistes de l'histoire des mathématiques au 18e siècle, mais son style très clair et pédagogique permet de le recommander à un public beaucoup plus large. Je le recommande en particulier à mes collègues de l'Université ; ils y trouveront mille anecdotes pour illustrer ou agrémenter leurs cours.

Jean-Claude Carrega,
Institut Camille Jordan, Villeurbanne

Moduli of Riemann Surfaces, Real Algebraic Curves, and Their Superanalogs

S. M. Natanzon

American Mathematical Society, 2004. 160 p.
ISBN-13 : 978-0-8218-3594-4. $ 47

Les surfaces de Riemann, les groupes Fuchsiens, les espaces de Teichmüller, les fonctions Arf, les structures spin et leur parité, les variables super-commutatives et la super-symétrie, les courbes algébriques réelles, les fonctions thêta, le problème de Schottky sont tous, pour moi, des mots très alléchants, et ils jouent tous un rôle important dans le livre de Sergei Natanzon.

Pour introduire les surfaces de Riemann, la démarche de l'auteur consiste à commencer par le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\}$ et son groupe d'automorphismes $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

$\mathbb{H}$ est le revêtement universel de toute surface de Riemann hyperbolique P, et donc $\pi_1(P)$ devient un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. En étudiant les sous-groupes ainsi obtenus on arrive, en relativement peu de pages, à une paramétrisation explicite de l'espace de Teichmüller : l'espace des structures complexes sur une surface donnée.

On étudie ensuite les structures spin et les fonctions Arf associées. Il existe de nombreuses manières d'introduire les structures spin ; l'auteur, fidèle aux groupes Fuchsiens, les définit comme relèvements du groupe $\pi_1(P)$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Puis, après une brève introduction à l'algèbre de Grassmann des variables super-commutatives, arrivent le super-demi-plan de Poincaré et son groupe d'automorphismes (les super-symétries). La classification des super-surfaces de Riemann se trouve être équivalente à la classification des fonctions Arf.

Le deuxième chapitre du livre est consacré aux surfaces de Riemann P réelles, autrement dit, munies d'une involution anti-holomorphe τ. Le nombre d'ovales réels (invariants par τ) sur une surface de genre g ne peut pas dépasser $g + 1$ (inégalité de Harnack). De plus, ces ovales peuvent diviser la surface P en deux morceaux ou bien la laisser connexe. Mais comment prouver que le nombre d'ovales et la connexité ou non de ($P \setminus$ ovales) sont les seuls invariants topologiques ? Réponse : à l'aide des groupes Fuchsiens réels, car l'espace de ces groupes peut, une fois de plus, être paramétré explicitement.

Après plusieurs sections où le travail du premier chapitre sur les fonctions Arf et les structures spin est transposé aux surfaces de Riemann réelles, l'auteur termine le chapitre par quelques sujets nouveaux. Le théorème de Sturm-Hurwitz classique affirme qu'une fonction périodique dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$\sum_{\boxed{k \geqslant n}} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

a au moins $2n$ zéros sur $[0, 2\pi[$. Natanzon généralise la notion de série de Fourier et le théorème de Sturm-Hurwitz au cas des surfaces de Riemann réelles (P, τ). Le cas classique correspond à $P = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $\tau(z) = \bar{z}$. Suit une étude des jacobiennes, des variétés de Prym et du problème de Schottky pour les courbes réelles.

Le troisième chapitre parle des espaces des fonctions méromorphes sur les surfaces de Riemann. Étant donné un revêtement ramifié $f : P \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ de la sphère de Riemann, on peut relever la structure complexe de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ sur P pour obtenir une structure de surface de Riemann sur P. Ainsi l'espace des fonctions méromorphes peut être vu comme l'espace des revêtements ramifiés de la sphère. Le problème de classifier les composantes connexes des espaces des revêtements ramifiés de la sphère avec des types de ramifications fixés est, dans le cas général, ouvert. Cependant, l'auteur prouve que ces espaces sont connexes dans le cas important où tous les points de ramification sur la sphère sont simples sauf peut-être un.

Le chapitre se conclut par une étude des espaces des fonctions méromorphes réelles sur les surfaces de Riemann réelles. Dans ce cas, le degré de la fonction sur chaque ovale réel de la surface est un nouvel invariant topologique.

Ainsi, à l'exception du troisième chapitre, la présentation passe avant tout par l'étude du groupe des automorphismes du demi-plan de Poincaré. La grande force de cette présentation est la cohérence de la vue d'ensemble. On voit qu'on peut construire, pas à pas, toute la théorie à partir des groupes Fuchsiens. Les étudiants qui s'intéressent aux espaces des modules ou aux espaces de Teichmüller, et qui pourraient être effrayés par les difficultés techniques des champs algébriques de Deligne-Mumford ou des différentielles de Beltrami, seront également rassurés de constater que dans l'approche par les groupes Fuchsiens, la plus grande difficulté technique consiste souvent à multiplier des matrices 2×2.

En même temps, cette démarche ne donne qu'une image très partielle de la richesse des objets qu'on introduit et des techniques qu'on peut utiliser pour les étudier ; ainsi l'apparition des espaces des modules et des super-symétries passe presque inaperçue. Je pense que le livre gagnerait beaucoup à être enrichi de quelques paragraphes attirant l'attention du lecteur sur telle ou telle construction et décrivant brièvement les sujets de recherche qui lui sont associés : la très riche théorie de l'intersection sur les espaces des modules ; les invariants de Gromov-Witten ; l'étude du flot de Teichmüller par des méthodes des systèmes dynamiques ; l'utilisation des fibrés spinoriels et de la super-symétrie en physique ; l'invariant de l'Arf des nœuds ; le seizième problème de Hilbert sur les courbes réelles et les méthodes de la géométrie tropicale.

Le livre est écrit avec rigueur et précision dans tout ce qui concerne le contenu mathématique : je n'ai pas trouvé une seule erreur ni dans les formulations et ni dans les démonstrations. Cependant, le texte mériterait d'être relu attentivement, car il contient un grand nombre de « bourdes », petites et grandes. (La comparaison avec le texte russe montre que la traduction en a éliminé quelques-unes, mais en a introduit d'autres.) Ainsi la toute première phrase du premier chapitre nous apprend que la métrique de Lobatchevski sur le demi-plan de Poincaré a une courbure *positive* constante. Sur la page 12 on lit une définition : « on dit qu'un triplet ordonné est *séquentiel* si ... » et sur la page 19 (soit 7 pages plus loin !) un lemme : « tout triplet ordonné est séquentiel ». De tels petits défauts sont sans importance pour un lecteur attentif, mais peuvent être déconcertants pour quelqu'un qui cherche à trouver rapidement telle ou telle information.

Je recommanderais sans hésiter ce livre aux bibliothèques et aux étudiants, tout en conseillant à ces derniers de ne pas se laisser déconcerter par des petits défauts de présentation et surtout de ne pas se laisser tromper par une certaine monotonie des arguments. En effet, Natanzon, sans en avoir l'air, introduit ici un grand nombre de concepts cruciaux pour les mathématiques modernes et en suivant une voie qui évite bon nombre de problèmes techniques.

Dimitri Zvonkine,
Institut Mathématique de Jussieu (Paris VI)

Introduction to Quadratic Forms over Fields
T.Y. LAM
American Mathematical Society, 2005. 550 p. ISBN : 0-8218-1095-2. $ 79

À l'origine, la théorie des formes quadratiques était essentiellement arithmétique, sujet d'étude d'éminents théoriciens des nombres, tels Minkowski, Siegel ou encore Hasse.

En 1937, dans un changement radical de point de vue, Witt fonde la théorie dite *algébrique* des formes quadratiques. D'une part, il ne se contente plus de travailler sur un corps local ou global, mais étudie les formes quadratiques sur un corps arbitraire. D'autre part, il les considère non plus individuellement, mais dans leur ensemble, construisant ainsi l'anneau de Witt. C'est une vingtaine d'années plus tard que cette théorie prend un véritable essor, notamment avec les travaux de Pfister sur les formes multiplicatives, et les théorèmes de structure de l'anneau de Witt qui en découlent.

Plus récemment, enfin, une nouvelle page a commencé à s'écrire avec des auteurs comme Karpenko, Morel, Vishik et Voevodsky. Trouvant sa place au cœur de développements récents, notamment la théorie homotopique des schémas, l'étude des formes quadratiques bénéficie de techniques sophistiquées, comme la cohomologie motivique ou les opérations de Steenrod sur certains groupes de Chow, qui ont permis des progrès spectaculaires. Citons, à titre d'exemple, la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky, ou encore les théorèmes de Vishik et Karpenko qui améliorent considérablement le fameux Haupsatz d'Arason-Pfister.

Dans le livre présenté ici, c'est la théorie algébrique des formes quadratiques qui est exposée, de façon à la fois claire, précise, et extrêmement détaillée. Il ne s'agit cependant pas d'une nouvelle version du précédent livre du même auteur sur le sujet, « The Algebraic Theory of Quadratic Forms », publié en 1973 et qui avait à l'époque reçu le prix Leroy P. Steele de l'American Mathematical Society. En effet, comme l'explique T.Y. Lam dans son introduction, si la structure globale a été préservée, de nombreux chapitres ont été réécrits, de façon à prendre en compte une partie des développements de ces trente dernières années. Au total, le nombre de pages, tout comme d'ailleurs le nombre d'exercices, a doublé.

Les résultats récents les plus techniques ne sont qu'effleurés, et les interactions avec d'autres domaines des mathématiques, comme les groupes algébriques, la géométrie algébrique ou encore la K-théorie, sont volontairement minimisés. Ceci permet à l'auteur de préserver le caractère introductif de son livre. Accessible à tout lecteur ayant de bonnes connaissances d'algèbre de base, il présente les fondements de la théorie : du théorème de simplification de Witt aux invariants de corps définis à l'aide de formes quadratiques, en passant entre autres par l'étude de l'anneau de Witt, le principe de Hasse-Minkowski ou encore l'étude du comportement des formes quadratiques par extension (algébrique ou transcendante) des scalaires. En outre, deux chapitres entièrement nouveaux, intitulés « Special Topics in Quadratic Forms » et « Special Topics on Invariants » présentent quelques résultats plus pointus. L'auteur y expose par exemple, en incluant toutes les démonstrations, la construction d'un corps dont le u-invariant vaut 6, telle qu'elle a été proposée par Merkurjev en 1988.

Ainsi, tout en éveillant la curiosité du lecteur sur les progrès remarquables obtenus dans le domaine au cours des dix dernières années, T.Y. Lam fournit non seulement une excellente introduction au sujet, mais également un livre de référence précieux pour les spécialistes.

Anne Queguiner-Mathieu,
Université Paris XIII