Complementi di Algoritmi e Strutture Dati

Gestione di Portafogli

Docente: *Nicolò Cesa-Bianchi* versione 6 giugno 2021

Consideriamo l'investimento di un dato capitale (per esempio mille Euro). Per abbattere il rischio, investiamo il capitale frazionandolo su $K > 1$ titoli fissati che denotiamo con gli interi $1, 2, \ldots, K$. Per avvantaggiarci delle fluttuazioni del mercato, ogni giorno decidiamo una nuova suddivisione (fra gli stessi K titoli) del capitale investito.

Denotiamo con $p_1(t), \ldots, p_K(t) \geq 0$ il nostro portafoglio titoli, ovvero le frazioni del capitale che investiamo su ciascun titolo nella t-esima giornata. Chiaramente, $p_1(t) + \cdots + p_K(t) = 1$.

Indichiamo con $x_i(t)$ il rendimento (rapporto fra prezzo di chiusura e prezzo d'apertura) del titolo i nel giorno t. Il rendimento $x_i(t)$ indica quanto vale alla fine del giorno t un Euro investito nel titolo i all'inizio del giorno t.

Per esempio, se investiamo mille Euro il primo giorno sul titolo i, e il rendimento del titolo i nei tre giorni successivi è dato dalla sequenza $x_i(1) = 0.6$, $x_i(2) = 0.8$, $x_i(3) = 2.5$, i nostri mille Euro diventano $1000 \times 0.6 \times 0.8 \times 2.5$, ovvero milleduecento Euro. Si noti che $x_i(t) \geq 0$, dove $x_i(t) = 0$ rappresenta una chiusura del titolo con valore azzerato.

Una strategia di investimento usata in pratica è il ribilanciamento a coefficienti constanti (RCC). Ovvero, viene decisa una suddivisione $p_1, \ldots, p_K$ del capitale iniziale e questa suddivisione viene mantenuta per l'intero arco di tempo considerato. Dato che i rendimenti dei titoli variano nel tempo, per mantenere la suddivisione con le stesse proporzioni iniziali è necessario vendere e acquistare (cioè ribilanciare) al termine di ogni periodo.

Una strategia RCC può dare un profitto molto superiore del rendimento del miglior titolo. Per esempio, supponiamo che $K = 2$ e $x_1(t) = 1$ per $t = 1, 2, \ldots, T$ per il primo titolo (per esempio, il primo titolo rappresenta Euro in assenza di inflazione), mentre $x_2(1) = \frac{1}{2}, x_2(2) = 2, x_2(3) = \frac{1}{2}, x_2(4) = 2, \ldots$ per il secondo titolo. Chiaramente, investendo una qualsiasi somma nei due titoli il primo giorno senza ribilanciare non guadagnamo nulla (anzi, se vendiamo la quota del secondo titolo dopo un giorno dispari, ne perdiamo la metà. D'altra parte, si consideri la strategia RCC con coefficienti $(1/2, 1/2)$. Il profitto di questa strategia è $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ dopo la prima giornata.

Dato che dopo il primo giorno il capitale non è più suddiviso 50%-50% fra i due titoli, esso viene ribilanciato vendendo parte della quota del primo titolo e aumentando la quota del secondo titolo. Questo corrisponde all'intuizione: compra quando è basso e vendi quando è alto. Il profitto del secondo giorno è $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$. Come al termine della prima giornata, anche questa volta il capitale viene ribilanciato per riottenere la suddivisione 50%-50%.

Perciò, il profitto totale dopo due giorni è $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$. È facile vedere che il profitto dopo quattro giorni sarà $(9/8)^2$ e, in generale, dopo T giorni (con T pari) il profitto sarà $(9/8)^{T/2}$. Ovvero, in circa quattro mesi i mille euro diventano un milione, mille volte il nostro capitale iniziale!

In generale, dato un mercato $\boldsymbol{x}(1), \ldots, \boldsymbol{x}(T)$ con $\boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_K(t)\big)$, il profitto totale dopo t giorni di una strategia RCC $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_K)$ è

$$G_t(\boldsymbol{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{K} p_i\, x_i(s) \right) = \prod_{s=1}^{t} \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x}(s)$$

Questo, lo ricordiamo, corrisponde al valore di un Euro investito il primo giorno, quindi $G_0(p) = 1$.

Sia

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (p_1, \ldots, p_K) \,:\, 0 \le p_i \le 1,\, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right\}$$

il simplesso delle distribuzioni di probabilità su K elementi, che corrisponde all'insieme di tutte le strategie RCC. Consideriamo ora la strategia randomizzata che estrae un portafoglio a caso da Δ e lo usa per T giorni. Il valore atteso del profitto di tale strategia è

$$\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] = \frac{\int_\Delta G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \tag{1}$$

Ora confrontiamo G_T col profitto della migliore strategia RCC. Dato un mercato $\boldsymbol{x}(1), \ldots, \boldsymbol{x}(T)$, sia $\boldsymbol{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_K^*)$ il portafoglio che massimizza $G_T(\boldsymbol{p})$. Per un dato $0 < \alpha < 1$, definiamo ora l'insieme

$$\mathcal{S} = \{(1-\alpha)\boldsymbol{p}^* + \alpha \boldsymbol{q} \,:\, \boldsymbol{q} \in \Delta\} = (1-\alpha)\boldsymbol{p}^* + \alpha\Delta \tag{2}$$

che corrisponde a spostare il centro del simplesso in $\boldsymbol{p}^*$ e scalarlo di un fattore α.

Dato che ogni punto di $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ è esprimibile come $\boldsymbol{p} = (1-\alpha)\boldsymbol{p}^* + \alpha\, \boldsymbol{q}$ dove $\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q} \in \Delta$ e $0 < \alpha < 1$, si ha che $\boldsymbol{p} \in \Delta$ e perciò $\mathcal{S} \subseteq \Delta$. Inoltre, per definizione di $\mathcal{S}$, per ogni $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ abbiamo che

$$p_i \ge (1-\alpha) p_i^* \qquad i = 1, \ldots, K$$

Per ogni $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ possiamo quindi scrivere

$$G_T(\boldsymbol{p}) = \prod_{t=1}^{T} \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x}(t) \ge \prod_{t=1}^{T} (1-\alpha)(\boldsymbol{p}^*)^\top \boldsymbol{x}(t) = (1-\alpha)^T G_T(p^*)$$

Riprendendo (1) e ricordando che $\mathcal{S} \subseteq \Delta$, possiamo osservare che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \int_\Delta G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} \\
&\ge \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \int_{\mathcal{S}} G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} \\
&\ge \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Delta)} \int_{\mathcal{S}} (1-\alpha)^T G_T(\boldsymbol{p}^*)\, d\boldsymbol{p} \\
&= \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{S})}{\mathrm{Vol}(\Delta)} (1-\alpha)^T G_T(\boldsymbol{p}^*)
\end{aligned}$$

Per valutare il rapporto $\mathrm{Vol}(\mathcal{S})\big/\mathrm{Vol}(\Delta)$ si rammenti (2), dove è chiaro che $\mathcal{S}$ è una versione scalata e traslata del simplesso Δ. Dato che siamo in K dimensioni, la scalatura per un fattore α fa diminuire il volume di un fattore α^K, mentre la traslazione non influenza il volume. Quindi

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) = \alpha^K \mathrm{Vol}(\Delta)$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] \geq (1-\alpha)^T \alpha^K G_T(\boldsymbol{p}^*)$$

Scegliamo ora $\alpha = \frac{1}{T+1}$. Usando la disuguaglianza elementare $1 + x \leq e^x$ per $x \in \mathbb{R}$ notiamo che

$$(1-\alpha)^T = \left(\frac{T}{T+1}\right)^T = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{T}\right)^T} \geq \frac{1}{e^{T/T}} = \frac{1}{e}$$

In conclusione, abbiamo

$$\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] \geq \frac{1}{(T+1)^K} G_T(\boldsymbol{p}^*)$$

In altre parole, $\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big]$ è almeno una frazione polinomiale di $G_T(\boldsymbol{p}^*)$. D'altra parte, abbiamo visto come la miglior RCC, $\boldsymbol{p}^*$, possa guadagnare esponenzialmente nel tempo T. Dato che il rapporto fra una funzione esponenziale ed una polinomiale è ancora una funzione esponenziale, in questi casi il guadagno atteso della strategia randomizzata è pure esponenziale.

Il problema della strategia randomizzata è che il guadagno è garantito solo in valore atteso. In pratica, il portafoglio estratto a caso potrebbe essere troppo lontano dal $\boldsymbol{p}^*$ per assicurare un guadagno vicino a quello di $\boldsymbol{p}^*$. Per rendere più robusta la strategia, possiamo estrarre $N > 1$ portafogli $\boldsymbol{p}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}^{(N)}$ indipendentemente a caso e suddividere il capitale iniziale in parti uguali fra questi N portafogli. Il guadagno di questa strategia è

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} G_T\big(\boldsymbol{p}^{(j)}\big)$$

Per calcolare quanto grande dev'essere N, possiamo usare la disuguaglianza di Bienaymé-Čebyšëv. Se Z è una variabile casuale con media μ e varianza σ^2, allora per ogni $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(Z < \mu - \lambda\sigma\Big) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Usiamo la disuguaglianza con

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} G_T\big(\boldsymbol{p}^{(j)}\big)$$

Si noti che

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\Big[G_T\big(\boldsymbol{p}^{(j)}\big)\Big] = \mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}[Z] = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Var}\Big[G_T\big(\boldsymbol{p}^{(j)}\big)\Big] = \frac{1}{N}\mathrm{Var}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big]$$

dove la seconda uguaglianza vale per l'indipendenza delle variabili casuali $G_T\big(\boldsymbol{p}^{(j)}\big)$. Per limitare la varianza, possiamo quindi scrivere

$$\mathrm{Var}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] = \mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})^2\big] - \mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big]^2 \le \mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})^2\big] \le \max_{\boldsymbol{p}\in\Delta} G_T(\boldsymbol{p})^2 = G_T(\boldsymbol{p}^*)^2$$

Usando quindi la disuguaglianza di Bienaymé-Čebyšëv con

$$\mu = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] \qquad \text{e} \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[Z]} \le \frac{G_T(\boldsymbol{p}^*)}{\sqrt{N}} \le \frac{(T+1)^K}{\sqrt{N}}\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big]$$

otteniamo

$$\mathbb{P}\left(Z < \left(1 - \frac{\lambda(T+1)^K}{\sqrt{N}}\right)\mu\right) \le \frac{1}{\lambda^2}$$

Quindi, con $\varepsilon = \frac{\lambda(T+1)^K}{\sqrt{N}}$ e $\frac{1}{\lambda^2} = \delta$ garantiamo che

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} G_T\big(\boldsymbol{p}^{(j)}\big) \ge (1-\varepsilon)\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big] \qquad \text{con probabilità almeno } 1-\delta$$

Sfortunatamente, questo implica che

$$N \ge \frac{(T+1)^{2K}}{\delta\varepsilon^2}$$

Ovvero dobbiamo campionare $\Omega\big(T^{2K}\big)$ portafogli per poter approssimare $\mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big]$ con alta probabilità.

Per aggirare questo ostacolo possiamo modificare la strategia randomizzata, in modo da assicurarci deterministicamente un guadagno pari al suo valor medio. Più precisamente, si consideri la strategia che il giorno t usa il portafoglio

$$\boldsymbol{p}(t) = \frac{\int_\Delta \boldsymbol{p}\, G_{t-1}(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}{\int_\Delta G_{t-1}(\boldsymbol{p}')\, d\boldsymbol{p}'} \tag{3}$$

Si noti che questa non è una strategia RCC, ma è una strategia dove i coefficienti di ribilanciamento, $\boldsymbol{p}(t)$, cambiano ogni giorno. In particolare, $\boldsymbol{p}(t)$ è una media dei coefficienti $\boldsymbol{p}$ di tutte le strategie RCC pesate dai loro profitti $G_{t-1}(\boldsymbol{p})$.

Non è difficile calcolare il profitto dopo T giornate della strategia (3). Prima di tutto, si osservi per per ogni portafoglio $\boldsymbol{p}$ vale la ricorrenza $G_t(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x}(t) G_{t-1}(\boldsymbol{p})$. Possiamo quindi scrivere

$$\prod_{t=1}^{T} \boldsymbol{p}(t)^\top \boldsymbol{x}(t) = \prod_{t=1}^{T} \frac{\int_\Delta \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x}(t) G_{t-1}(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}{\int_\Delta G_{t-1}(\boldsymbol{p}')\, d\boldsymbol{p}'} = \prod_{t=1}^{T} \frac{\int_\Delta G_t(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}{\int_\Delta G_{t-1}(\boldsymbol{p}')\, d\boldsymbol{p}'} = \frac{\int_\Delta G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}{\int_\Delta G_0(\boldsymbol{p}')\, d\boldsymbol{p}'}$$

Notando che $\int_\Delta G_0(\boldsymbol{p}')\, d\boldsymbol{p}' = \int_\Delta 1\, d\boldsymbol{p}' = \mathrm{Vol}(\Delta)$ abbiamo quindi

$$\prod_{t=1}^{T} \boldsymbol{p}(t)^\top \boldsymbol{x}(t) = \frac{\int_\Delta G_T(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}{\mathrm{Vol}(\Delta)} = \mathbb{E}\big[G_T(\boldsymbol{p})\big]$$

Resta il problema di calcolare efficientemente $\boldsymbol{p}(t)$ definito in (3). Anche se non è noto un modo di calcolare $\boldsymbol{p}(t)$ efficientemente, si può dimostrare che $\boldsymbol{p}(t)$ può essere approssimato in modo che, con alta probabilità, il guadagno della strategia approssimata è almeno $1-\varepsilon$ quello della strategia (3) e il calcolo dell'approssimazione richiede, per ogni t, tempo polinomiale in $T, K, \frac{1}{\varepsilon}$.