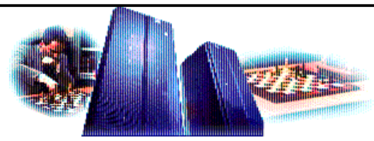
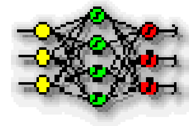
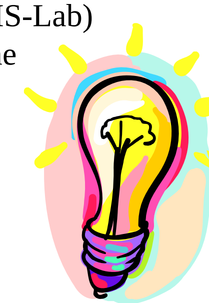




Fourier Transform

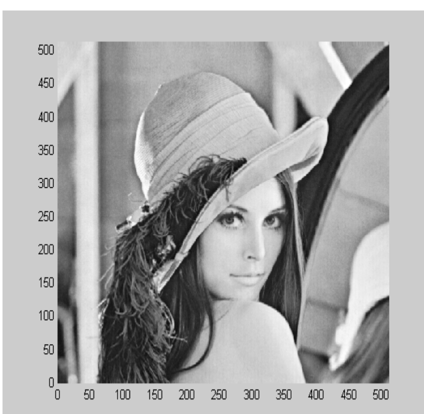
Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it



Filtraggio

Rimuovere rumore.
Esaltare alcune caratteristiche dell'immagine.



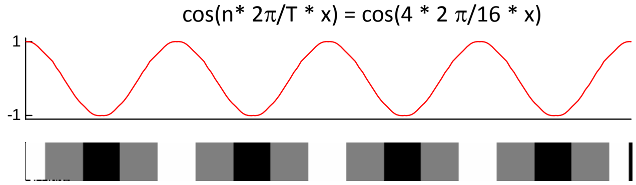
Compressione

95% - 3Kbyte
90% - 5Kbyte
70% - 9Kbyte
50% - 13Kbyte
Immagine originale
405KByte

Le alte frequenze non sono percepite dall'occhio umano come le frequenze più basse.

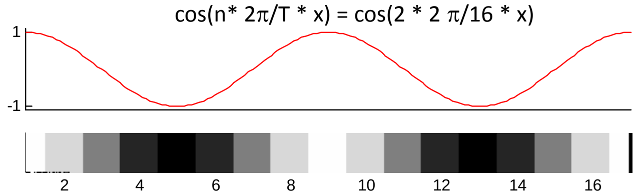
Funzioni circolari

cos(n* 2π/T * x) = cos(4 * 2 π/16 * x)



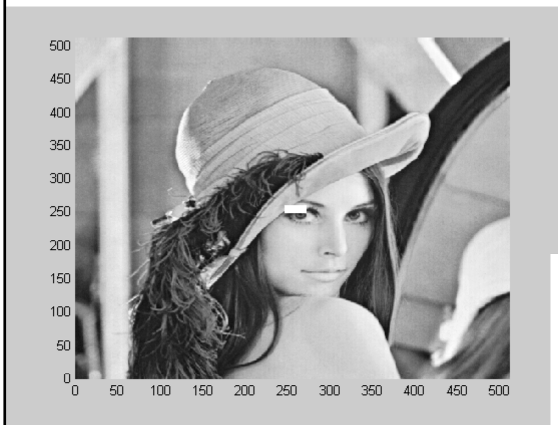
cos(n* 2π/T * k) = cos(π/2 * k)

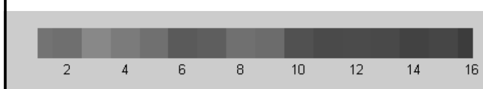
cos(n* 2π/T * x) = cos(2 * 2 π/16 * x)



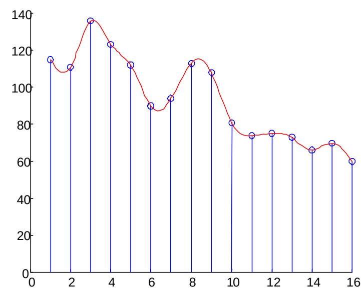
cos(n* 2π/T * k) = cos(π/4 * k)

Digitalizzazione di un'immagine





Campionamento



Serie di Fourier

- ***Data una funzione f(x) $\in L^1$, definita in un intervallo T, è possibile rappresentarla come somma di una serie trigonometrica:***
- $f(x) = c_o + \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(nhx) + b_n \sin(nhx)] = \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n sin(\frac{2\pi}{T}nx)]$
- $f(x) = c_o + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(2\pi\nu_o nx) + b_n sin(2\pi\nu_o nx)] =$

$$= c_o + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(w_o nx) + b_n sin(w_o nx)]$$

Le prime armoniche della serie

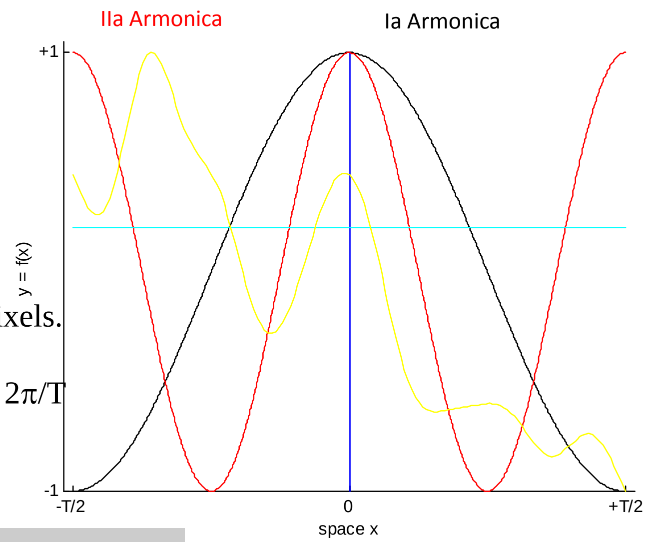
n=0 c_0 DC

n=1 $a_1\cos(\omega_o x)$ + $b_1\sin(\omega_o x)$

n=2 $a_2\cos(2\omega_o x)$+ $b_2\sin(2\omega_o x)$

$n_o = 1/T$ T = 16 pixels.

Pulsazione: $\omega = 2\pi n = 2\pi/T$



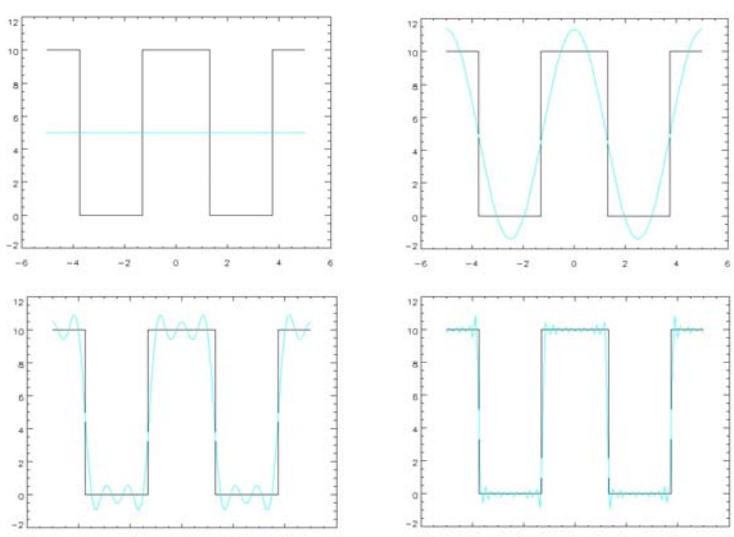
Ricostruzione di un'onda quadra mediante serie di Fourier

n = 0

n = 1

n = 3

n = 6



Come calcolare i coefficienti?

Alcuni concetti

- Prodotto interno di due funzioni f(.) e g(.) (proiezione): $\int f(x)g(x)dx = < f, g >$
- Condizione di ortogonalità: $< f, g > = 0$

- Le funzioni $\cos(nw_o x)$ e $\sin(nw_o x)$ sono ortogonali e sono ortogonali tra loro:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(nx2\pi/T)\cos(px2\pi/T)dx = \begin{cases} T \;\; per \;\; n = p = 0 \\ T/2 \;\; per \, n = p > 0 \\ 0 \;\; per \;\; n \neq p \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} sin(nx2\pi/T)sin(px2\pi/T)dx = \begin{cases} 0 \;\; per \;\; n = p = 0 \\ T/2 \;\; per \, n = p > 0 \\ 0 \;\; per \;\; n \neq p \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(nx2\pi/T)sin(px2\pi/T)dx \; = \; 0 \quad \forall p, n$$

Proiezione su una base

- Proietto sulle basi la funzione e ottengo:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(p\omega_o x)dx = \int_{-T/2}^{+T/2}\left\{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_o x) + b_n\sin(n\omega_o x)\right]\right\}\cos(p\omega_o x)dx$$

2 termini : $c_o \cos(pw_o x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_o x) + b_n\sin(n\omega_o x)\right]\ \cos(pw_o x)$

Integriamo entrambi i membri tra –T/2 e +T/2:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(pw_o x)dx \quad = \quad \int_{-T/2}^{+T/2} c_o\cos(pw_o x)dx \ +$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{+T/2} a_n\cos(n\omega_o x)\cos(pw_o x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{+T/2} b_n sin(n\omega_o x)\cos(pw_o x)dt\right)$$

Calcolo di a0 e b0

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)dx = \int_{-T/2}^{+T/2} c_o dx + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{+T/2} a_n\cos(n\omega_o x)\cos(pw_o x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{+T/2} b_n sin(n\omega_o x)\cos(pw_o x)dx\right) = Tc_0$$

$c_0 = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)dx$ Valor medio di f(x) (Componente DC).

Calcolo di an e bn > 0

- $n = p > 0$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} c_o \cos(pw_o x)dx = 0$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} a_n \cos(n\omega_o x)\cos(pw_o x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} b_n sin(n\omega_o x)\cos(pw_o x)dt \right) = a_p\, T/2$$

$$a_p = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(pw_o x)dx \qquad b_p = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) sin(pw_o x)dx$$

Rappresentazione in ampiezza + sfasamento

Risulta: $\cos(c+d) = \cos(c)\cos(d)+\sin(c)\sin(d)$.

$A_n*\cos(nw_ox+\phi_n) = A_n*\cos(\phi_n)*\cos(nw_ox) + A_n*\sin(\phi_n)*\sin(nw_ox) = a_n\cos(nw_ox)+b_n\sin(nw_ox)$.

$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2$

$\phi_n = \text{arctang}(b_n/a_n) = \text{arctang}[(A_n*\sin(\phi_n)) / (A_n*\cos(\phi_n))] = \text{arctang}(\sin(\phi_n)/\cos(\phi_n))$ c.v.d.

Pongo: $a_n = A_n \cos(\phi_n)$
$b_n = A_n \sin(\phi_n)$

La serie di Fourier

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_o x) + b_n sin(n\omega_o x)\right] =$$

$$\mathrm{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n\omega_o x + \phi_n)\right]$$

Analisi in frequenza o analisi armonica della funzione f(x).

Vengono estratte le frequenze o armoniche.

Rappresentazione esponenziale

Funzioni eponenziali e circolari di variabile complessa (z = x + iy)

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{z^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!}$$

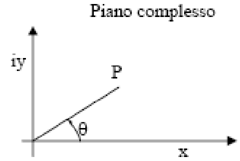
$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{n!} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-iz)^n}{n!} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!}$$

$$sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!}....$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{(2n)}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!}....$$

Piano complesso



$$sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \{e^{iz} - e^{-iz} = 2iz - 2i\frac{z^3}{3!} + 2i\frac{z^5}{5!} + ... = 2isin(z)\}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Possiamo scrivere l'esponenziale complessa in funzione di sin(z) e cos(z): e^{iz} = **cos(z) + isin(z).**

Se z = nw_0x, reale, risulta: e^{inw_0x} = **cos(nw_0x) + isin(nw_0x)**. N.B.: e^{inw_0x} è periodica di periodo $nw_0 2\pi$.

Come utilizzare gli esponenziali complessi

Consideriamo la seguente serie: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(w_o nx) + b_n sin(w_o nx)]$.

Dobbiamo dimostrare che: $a_n \cos(nw_o x) + b_n sin(nw_o x) = c_n e^{jnw_o x} + c_{-n} e^{-jnw_o x}$

Poniamo: $a_n = c_n + c_{-n}$ e $b_n = i(c_n - c_{-n})$, risulta:

$$(c_n + c_{-n}) \frac{e^{inw_o x} + e^{-inw_o x}}{2} + i(c_n - c_{-n}) \frac{e^{inw_o x} - e^{-inw_o x}}{2i} = c_n e^{inw_o x} + c_{-n} e^{-inw_o x} \quad \text{c.v.d.}$$

Analogamente si deriva: $c_n = 1/2(a_n - ib_n)$ $c_{-n} = 1/2(a_n + ib_n)$.

La forma combinata della serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x}$$

$$c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx$$

Ricapitolando

- Una funzione con supporto finito o periodica, appartenente agli spazi L^1 (assolutamente integrabile, con un numero finito di discontinuità), può essere rappresentata come combinazione lineare di funzioni di base circolari (Serie di Fourier).

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(w_o nx) + b_n sin(w_o nx)]$$

- Per via dell'ortogonalità delle basi, i coefficienti delle basi possono essere calcolati proiettando la funzione sulle basi stesse.

$$a_n = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(nw_o x)dx \qquad b_n = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) sin(nw_o x)dx$$

- I coefficienti rappresentano l'ampiezza e lo sfasamento delle cosinusoidi che costituiscono la funzione. La Serie di Fourier fa l'analisi in frequenza della funzione.

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(w_o nx + \phi_n)$$

- Utilizzando le funzioni esponenziali complesse (fasori) si può scrivere la serie di Fourier in modo compatto come:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x}$$

ed il calcolo dei coefficienti come:

$$c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx$$

A

Verso la trasformata di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \qquad c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx$$

E' una serie, i coefficienti sono infiniti ma numerabili.
Le frequenze sono tutte multiple di una frequenza fondamentale ω_o.
L'intervallo di integrazione è il periodo T associato a $\omega_{o.}$

Cosa succede se ω_o diventa piccolo a piacere?

Verso la trasformata di Fourier

$$c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-j\lambda w_o x} dx \qquad Tc_n = \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-j\lambda \frac{2\pi}{T_o} x} dx$$

Se λ assume valori interi, ritroviamo per ogni λ un c_n.

Se λ assume valori reali, i valori sono infiniti non abbiamo più un insisme numerabile di coefficienti, ma un insieme continuo.

Se λ assume anche valori compresi tra 0 e 1 il si ottengono anche frequenze comprese tra 0 e ω_0. Per calcolare questi coefficienti servono periodi di integrazione sempre più ampi.

Quindi..

La trasformata di Fourier

$$Tc_n = \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-j\lambda \frac{2\pi}{T_o} x} dx$$

$$F(f(x), \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\lambda 2\pi x} dx$$

Dove T_o viene incorporato in λ e può diventare quindi grande a piacere (ω_o piccolo a piacere).

Analisi in frequenza con granularità infinitesima.

La trasformata inversa di Fourier

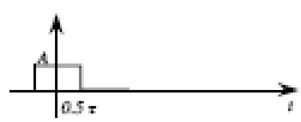
$$F(f(x),\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\lambda 2\pi x} dx$$

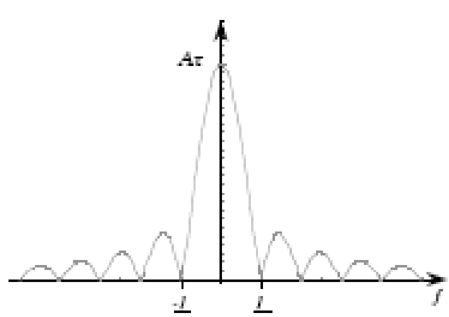
Date le componenti in frequenza, è possibile ricostruire la funzione originaria? Sì, tramite la trasformata inversa:

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f(x),\lambda) e^{+j\lambda 2\pi\lambda x} d\lambda}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x}$$

Esempio di trasformata di Fourier

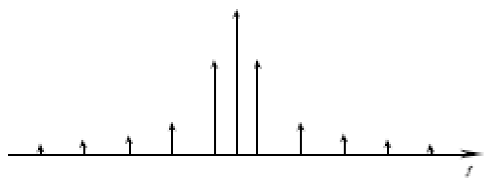




Segnale periodico

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \qquad c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx$$

In questo caso w_o è associato al periodo del segnale



Si ottiene una serie di coefficienti... infiniti, numberabili

Matematicamente

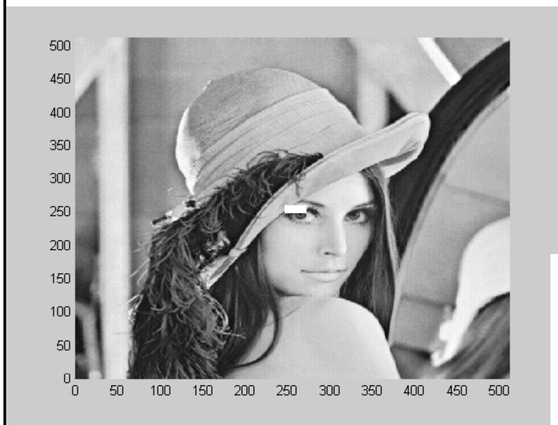
$$F(f(x), \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\lambda 2\pi x} dx$$

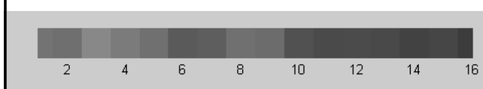
Sostituisco ad f(x), la serie:

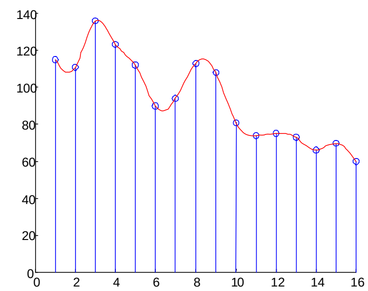
$$F(f(x), \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jnw_o x} e^{-j\lambda 2\pi x} dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\lambda - nw_o)x} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\lambda - n\omega_o)$$

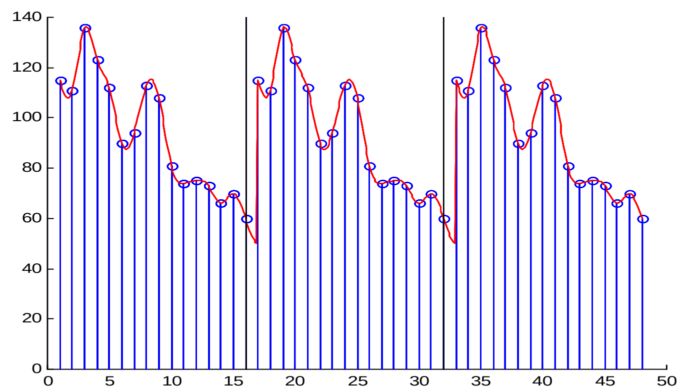
Ma noi abbiamo segnali con supporto finito







Periodicizzazione del segnale



Guardando il segnale su dominio infinito si vedono però delle discontinuità spurie -> alte frequenze -> finestratura per rendere il segnale continuo ai bordi senza alterarne il contenuto in frequenza.

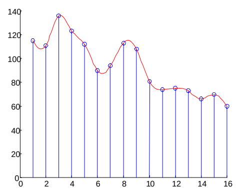
Serie discreta di Fourier

Serie di Fourier: f(x) = c_o + 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_o x) + b_n \sin(n\omega_o x)\right]$

Serie di Fourier: f(x) = c_o + 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\frac{2\pi}{T_o}x) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T_o}x)\right]$

Serie campionata di Fourier: f(k) = c_o + 2 $\sum_n [a_n \cos(\frac{2\pi}{N}nk) + b_n sin(\frac{2\pi}{N}nk)]$

$T = N\Delta x_k = N$ - numero di campioni nel periodo.
$\Delta xk = 1$ in modo arbitrario.



Coefficienti della serie

Quanti coefficienti si potranno calcolare?

$$c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-j\lambda w_o x} dx = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-j\lambda \frac{2\pi}{T_o} x} dx$$

$$c_n = 1/N \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(k) e^{-\frac{jn2\pi k}{N}}$$

Si possono calcolare N termini distinti:

Risulta infatti: $e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} = e^{-j(n+N)\frac{2\pi}{N}k} = e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} e^{-jN\frac{2\pi}{N}k}$

La trasformata discreta di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \qquad c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx$$

$$f(k) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2} c_n e^{\frac{jn2\pi k}{N}} \qquad c_n = 1/N \sum_{k=-N/2}^{N/2} f(k) e^{-\frac{jn2\pi k}{N}}$$

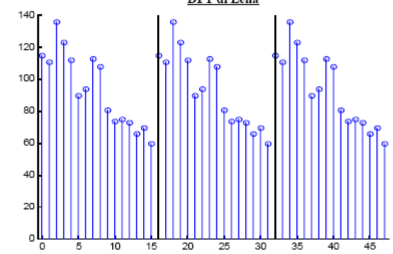
Sono funioni periodiche, f(k) è periodicizzata, cn è periodica.
Deriva quindi dalla serie di Fourier, in quanto il numero di frequenze è numerabile e multiplo della frequenza fondamentale.

Forma utilizzata della trasformata discreta di Fourier

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{jn2\pi k}{N}} \qquad c_n = 1/N \sum_{k=0}^{(N-1)} f(k) e^{-\frac{jn2\pi k}{N}}$$

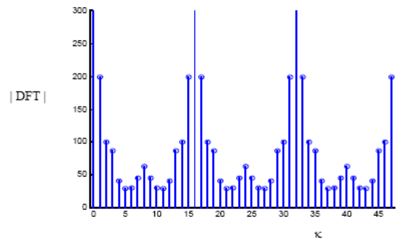
A.A. 2009-2010

DFT di Lena



Periodicizziamo sequenza di campioni: f(x) = f(x + m N). m = 0,1,2,..... 15.

IDFT: $f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{jn2\pi k}{N}}$ DFT: $c_n = 1/N \sum_{k=0}^{(N-1)} f(k) e^{-\frac{jn2\pi k}{N}}$



Anche la trasformata è periodico di periodo N. k va letto come kΔv con Δv = 1/T.

Per sequenze reali risulta: $c_n = c_{N-n}^*$.

http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese\

A.A. 2009-2010

DFT ed IDFT sono Trasformate una l'inversa dell'altra

- Utilizziamo l'identità:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{-jn2\pi k}{N}} = \begin{cases} N & se\ n = mN\ \ m, intero \\ 0 & se\ n \neq mN \end{cases}$$

Il fasore è periodico di periodo 2π.

- Risulta la somma di una successione geometrica:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{-jn2\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\left(\frac{-jn2\pi}{N}\right)k} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{\left(\frac{-jn2\pi}{N}\right)} \right]^k = \frac{1-\left(e^{\frac{-jn2\pi}{N}}\right)^N}{1-e^{\frac{-jn2\pi}{N}}}$$

- Partiamo da: f(κ) = $\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{j2\pi nk}{N}}$

- Sostituiamo a c_n la sua espressione: $c_n = 1/N \sum_{k=0}^{(N-1)} f(k) e^{-\frac{jn2\pi k}{N}}$.

- Prendiamo f(κ') = $\sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{\frac{jn2\pi k'}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(1/N \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{jn2\pi k}{N}} \right) e^{\frac{jn2\pi k'}{N}} =$

$$= 1/N \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{jn2\pi(k-k')}{N}} =$$

$$= \begin{cases} 1/N \sum_{k=0}^{N-1} f(k) N & k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases} = f(k')$$

(c.v.d.).

nes.dsi.unimi.it\~borghese\

DFT 2D

- La trasformata di Fourier bidimensionale è:

$$c_{n,m} = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} f(k,l)e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)}$$ dove n, k = 0,1,2…N-1 percorrono le colonne.

$$f(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}e^{j2\pi(nk/N+ml/M)}$$ dove m, l = 0,1,2…,M-1 percorrono le righe.

- Possiamo scrivere la Trasformata di una riga l' come:

$$c_n(k') = 1/N\sum_{k=0}^{N-1} f(k,l')e^{-j2\pi(nk/N)}$$ Sono M vettori di N elementi ciascuno.

- Possiamo scrivere la Trasformata di una colonna k' come:

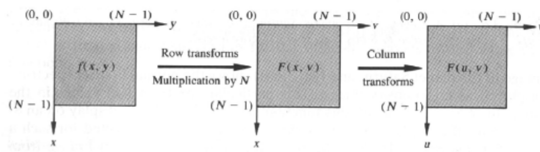
$$c_m(l') = 1/M\sum_{l=0}^{M-1} f(k',l)e^{-j2\pi(ml/M)}$$ Sono N vettori di M elementi ciascuno.

- Possiamo scrivere la Trasformata come trasformata per colonna della trasformata per righe /o viceversa) - separabilità:

$$c_{n,m} = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} f(k,l)e^{-j2\pi(nk/N)}e^{-j2\pi(ml/M)} = c_{n,m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(nk/N)}1/M\sum_{l=0}^{M-1} f(k,l)e^{-j2\pi(ml/M)}$$

dove:

$$c_n(k') = 1/M\sum_{l=0}^{M-1} f(k',l)e^{-j2\pi(ml/M)}$$ è la trasformata per colonne.



$\frac{n}{N} = v_x = \frac{n}{N\Delta x_k}$ $\Delta x_k = 1$ $\frac{m}{M} = v_y = \frac{m}{M\Delta y_k}$ $\Delta y_k = 1$

$e^{-j2\pi(nk/N)} = \cos(2\pi nk/N) + j\,sin(2\pi ml/M)$

LENA

La trasformata è periodica di periodo N sulle righe ed M sulle colonne.

Le frequenze più elevate sono (n-1) ed (m-1).