



# ART e oltre

Alberto Borghese & Iuri Frosio

Dipartimento di Scienze dell'Informazione  
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati  
<http://ais-lab.dsi.unimi.it>

Università degli Studi di Milano



## Il problema

Generazione di immagini radiografiche 3D (immagini tomografiche)

Soluzioni a costo medio-basso (50-60KEuro) per studi medici (dentistici in particolare, ma anche in sala operatoria, angiografia...).

In ambito dentale: in implantologia per valutare in 3D gli spessori ossei, la situazione e posizione dei canali radicolari e mandibolari, geometria per interventi di chirurgia maxillofacciale, infiammazioni, micro-fratture, visualizzazione dei TMJ....

Specifiche di massima:

Risoluzione:

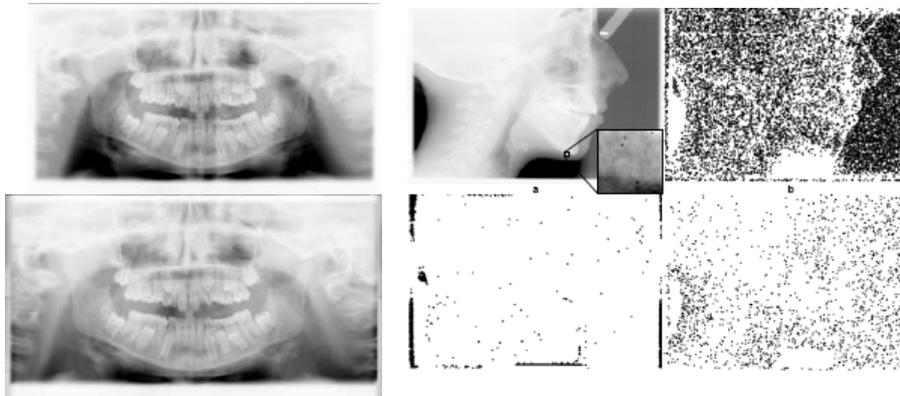
Dimensioni del volume da ricostruire (singolo dente).

Maccanica semplificata.

Tempi di realizzazione dell'esame *ragionevoli*.



## Alcuni problemi (e soluzioni) di radiografia digitale

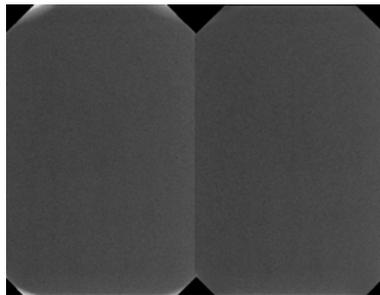


Panoramic Imaging  
Robust estimate of the column mean  
Column equalization.

Impulsive noise removal  
Switching median filter  
Analysis of the residual in a 3x3 window  
Threshold set according to psychophysics  
and regularized through a sensor model

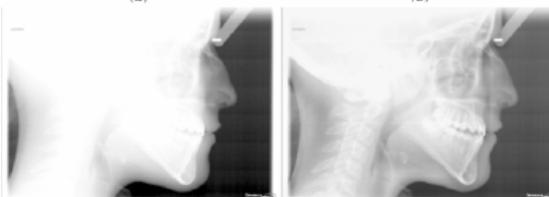


## Alcuni problemi (e soluzioni) di radiografia digitale - II



Regioni critiche (risposta variante pixel-pixel  
10K di memoria a bordo.

Codifica delle mappe locali di  
Offset e guadagno (RBF, down-up sampling,  
codifica pacchetti)



Fitting dell'istogramma mediante  
mixture (EM)  
Clustering  
Definizione di una gamma map  
(sottocampionata)  
Applicazione della mappa di gamma  
correction, upsampling e smoothing.



## Sommario



### Tomografia lineare e tomosintesi

Risultati sperimentali

Problemi e soluzioni nella tomosintesi.

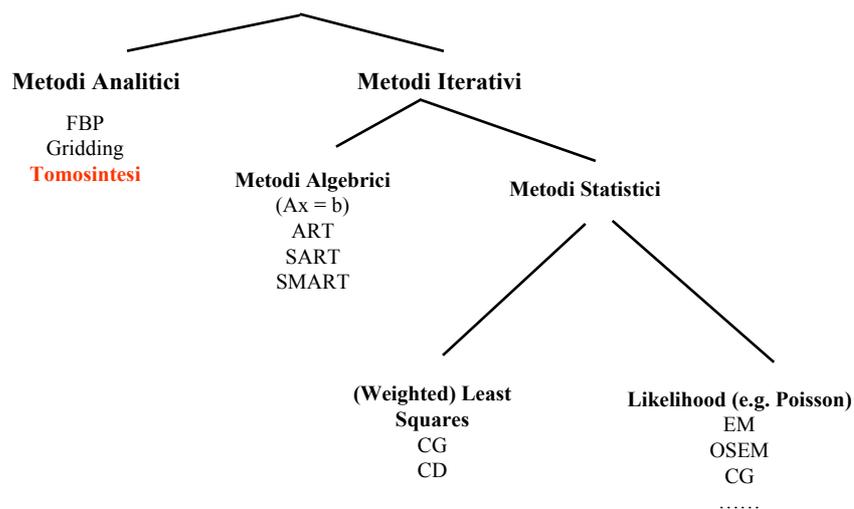
Blurring nella tomosintesi.

Tecniche di deblurring nella tomosintesi.

Formulazione iterativa del problema.



## Classificazione metodica tomografica (Fessner, 2006)





## Le scelte possibili (Fessner, 2006)



Descrizione problema (discreto, continuo).

Parametrizzazione del volume: voxel o funzioni di base (e.g. RBF).

Modello del sistema di acquisizione (geometria, scattering....).

**Nel caso dei metodi iterativi, occorre anche definire:**

Modello statistico delle misure (rumore sui dati, e.g. Poisson, Gaussiano...).

Funzione di costo da ottimizzare (implicita o esplicita; e.g. minimi quadrati, massima verosimiglianza).

Scelta dell'algoritmo di ottimizzazione.

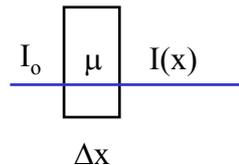
Nel deblurring dei risultati dei modelli analitici, si può ricorrere a tecniche iterative...



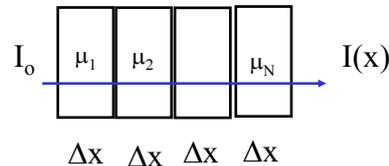
## L'assorbimento nei tessuti



$$I(x) = I_0 e^{-m\Delta x}$$



$$I(x) = I_0 e^{-\sum_{k=1}^N \mu_k \Delta x}$$

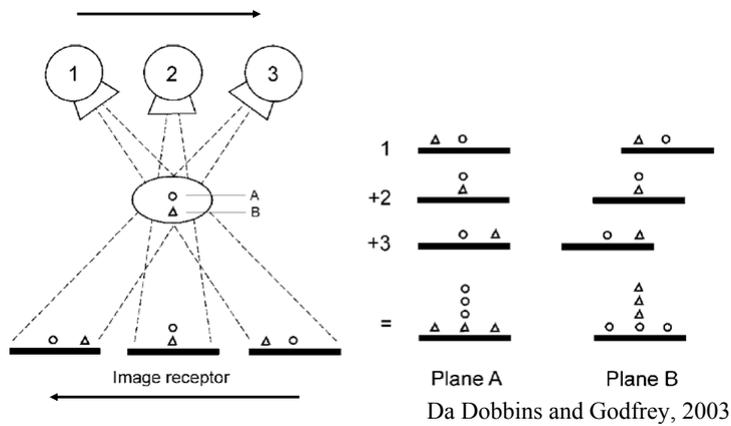


$$\ln(I(x)) - \ln(I_0) = -\sum_{k=1}^N \mu_k \Delta x$$

Ipotesi: diffrazione e rifrazione trascurabili.



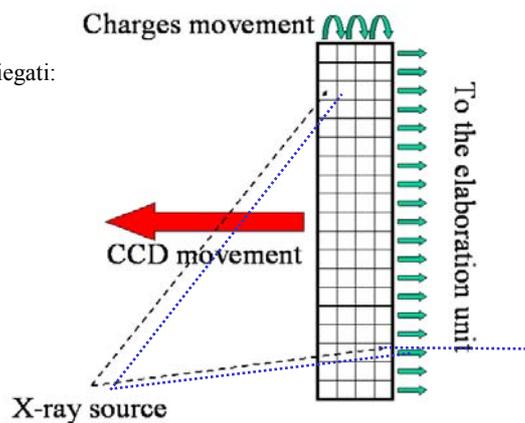
## Stato dell'arte: Tomografia (lineare, Ziedes des Plantes, 1932) e tomosintesi (Grant, 1972).



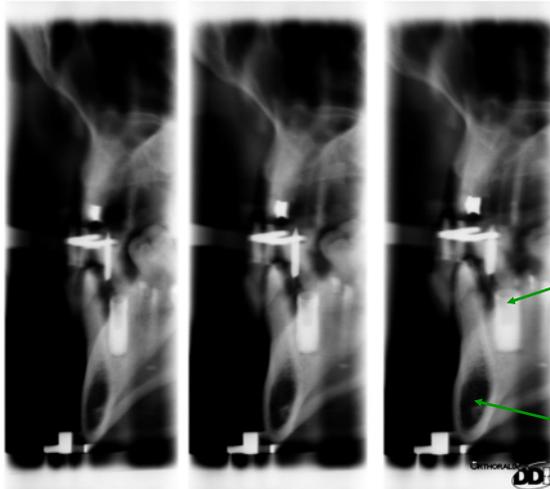
## Sensori Time Delay Integration (TDI)



Sensori Hamamatsu impiegati:  
1536 x 64 pixel  
Pixel 96 x 96  $\mu\text{m}$   
64 cicli di clock  $\nabla$  pixel



Aumentano il segnale perché viene misurato da N celle adiacenti (utilizzati in radiografia con bassa intensità ed in astronomia).  
Progettando un opportuno movimento della sorgente oltre che del sensore è possibile sommare raggi che provengono da posizioni diverse e quindi effettuare la tomografia lineare sul sensore.



Immagini  
"Transcan"

Perno di  
Interesse  
(fuori fuoco)

Canale  
Mandibolare

**Risultati e problemi**

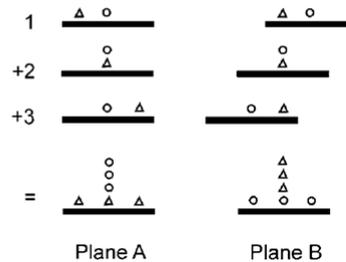
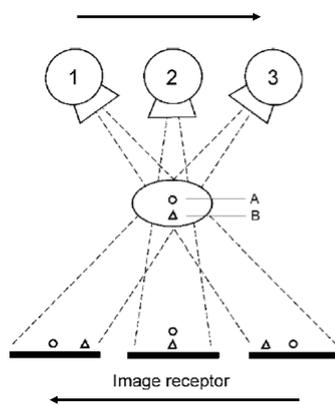
Un'unica slice viene ricostruita.

$I(x)$  misurato è in realtà la somma degli esponenziali dei coefficienti di assorbimento

$$I(x) = I_0 e^{-\sum_{k_1=1}^N \mu_{k_1} \Delta x} + I_0 e^{-\sum_{k_2=1}^N \mu_{k_2} \Delta x} + \dots + I_0 e^{-\sum_{k_M=1}^N \mu_{k_M} \Delta x}$$



### Tomosintesi (Grant, 1972).



Da Dobbins and Godfrey, 2003

Traiettorie progettate in modo da potere sovrapporre esattamente le strutture presenti sul piano di messa a fuoco.

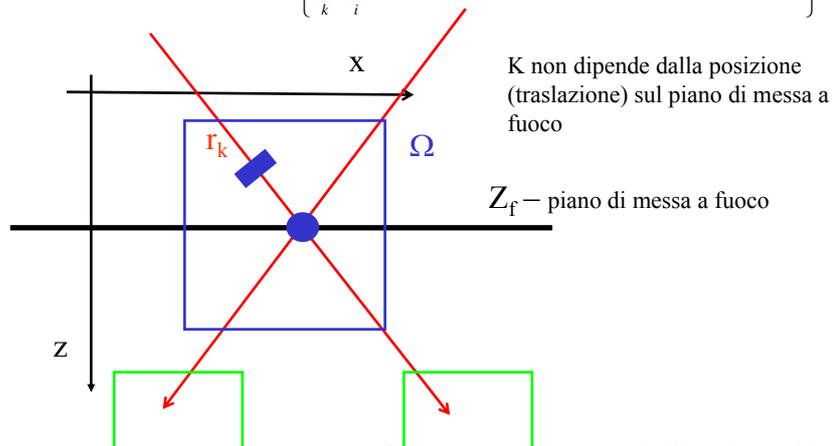


## Ipotesi sottostante la tomosintesi



E' simile alla tomografia convenzionale.  
Utilizza il logaritmo dell'immagine.  
Può sintetizzare più piani (uno alla volta).

$$\left\{ \sum_k \sum_i \mu_k(P_i(X_i, Y_i, Z_i)) \Delta r_k, P_i \in (r_k \cap \Omega); Z_i \neq Z_f \right\} = K$$



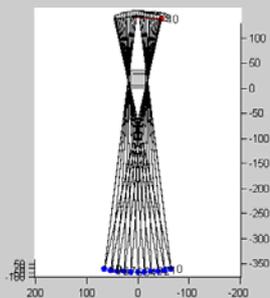
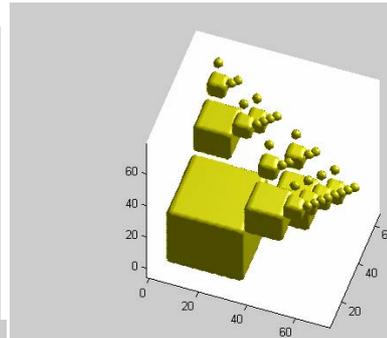
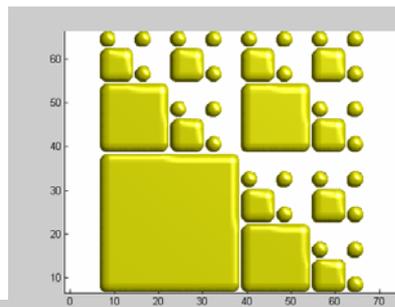
A.A. 2005-2006

13/74

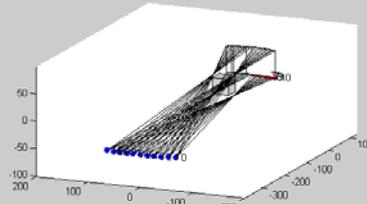
<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Simulazioni: oggetti acquisiti e traiettoria



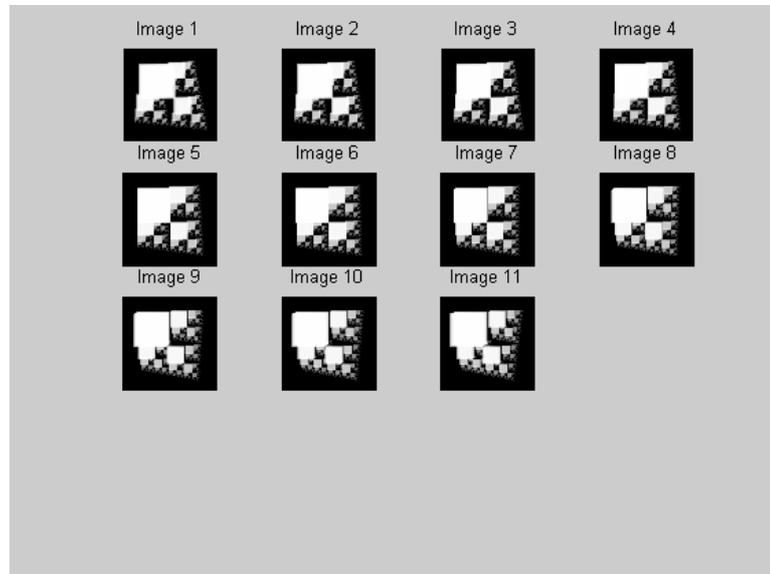
Arco emettitore: 20 gradi



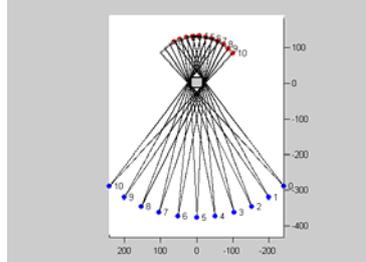
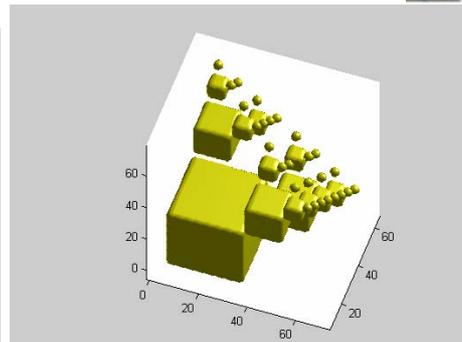
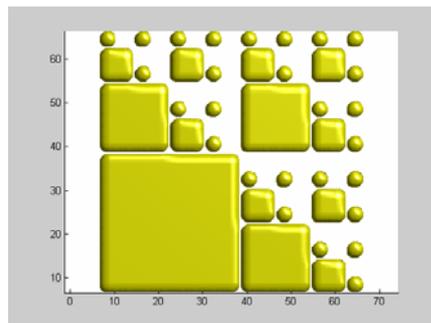
A.A. 20



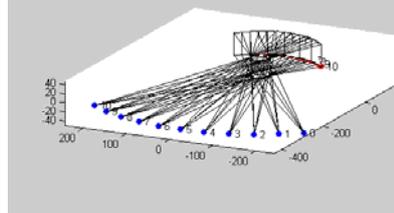
## Alcuni risultati da simulazioni::immagini



## Simulazioni::oggetti acquisiti e traiettoria

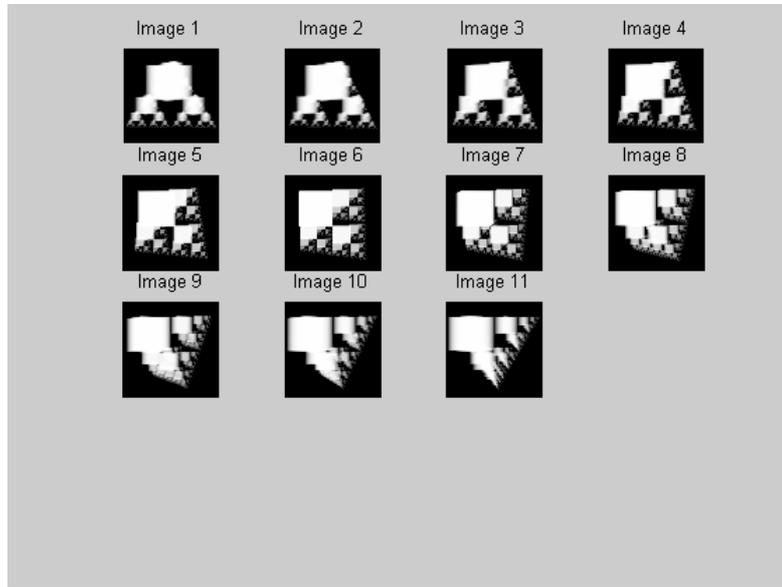


Arco emettitore: 80 gradi





## Alcuni risultati da simulazioni::immagini



A.A. 2005-2006

17/74

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Alcuni risultati da simulazioni::3D



Volume viewer 1.0 - Iuri Frosio - AIS Lab - Computer Science Department - University of Milan - frosio@dsi.unimi.it

X 12.3 Y 15.81 Z 18.48

LP filter  Stretch  Thresh

Load volume up Art.vol Load volume down Art.vol Colormap inv jet



## Tomosintesi::dove siamo?



Computazionalmente semplice: shift e somma del (logaritmo) delle immagini.

Viene ricostruita una sezione 3D (sezione a fuoco) a distanza arbitraria dall'emettitore.

Viene richiesta una traiettoria rettilinea.

Viene richiesto un angolo ridotto per massimizzare la risoluzione sui piani tomosintetizzati.



## Sommario



Tomografia lineare e tomosintesi

**Risultati sperimentali**

Problemi e soluzioni nella tomosintesi.

Blurring nella tomosintesi.

Tecniche di deblurring nella tomosintesi.

Formulazione iterativa del problema.



## Scelte di progetto



**Tecniche implementate.** Analitica / tomosintesi.

**Problem statement.** Equazioni discrete.

**Object parameterization.** Slice of pixels.

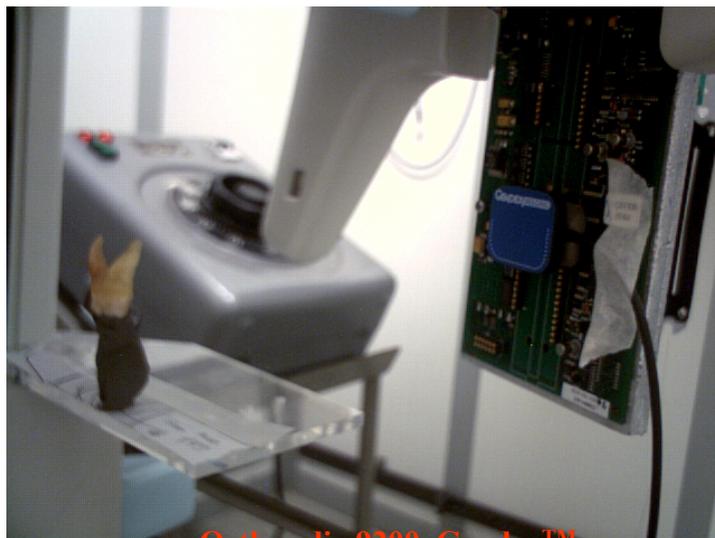
**System physical modeling.** No scattering. Monochromatic radiation. Known geometry.

Utilizzo di numero piccolo di radiografie ad angolo limitato: 20 gradi di angolo, equispaziatura della sorgente a 2 gradi, 11 immagini.

Utilizzo di apparecchiatura per panoramiche standard.



## Equipment



**Orthoralix 9200, Gendex™**



## Definizione della geometria



Utilizzo di ortopantomografo multifunzione standard.  
Posizionamento frontale dell'emettitore.  
Angolo rispetto al piano orizzontale di 5 gradi.

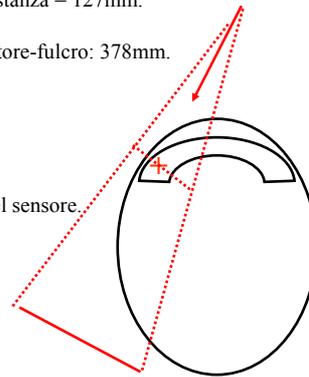
Distanza fulcro-detettore, almeno 127mm, per accomodare la testa del paziente. NB Più il sensore è vicino alla zona di interesse, meno radiazione si dà. Distanza = 127mm.

Diametro del braccio della macchina: 505mm => Distanza emettitore-fulcro: 378mm.  
=> Fattore di ingrandimento pari a 1.337.

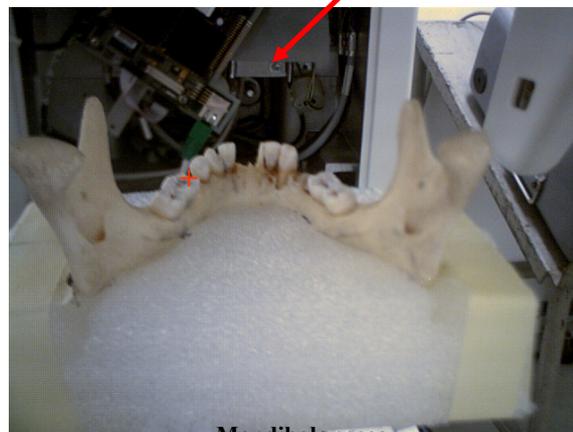
Larghezza della sezione di mandibola ricostituita: 36mm  
=> Larghezza del sensore 48mm.

Utilizzo di sensori TDI => Programmazione dello spostamento del sensore.

Tempo di acquisizione: 40s.



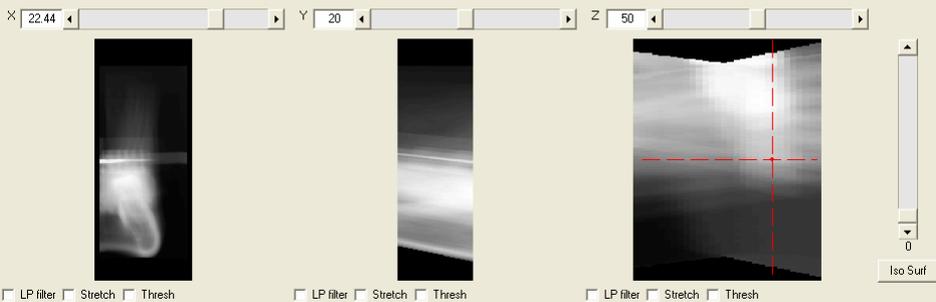
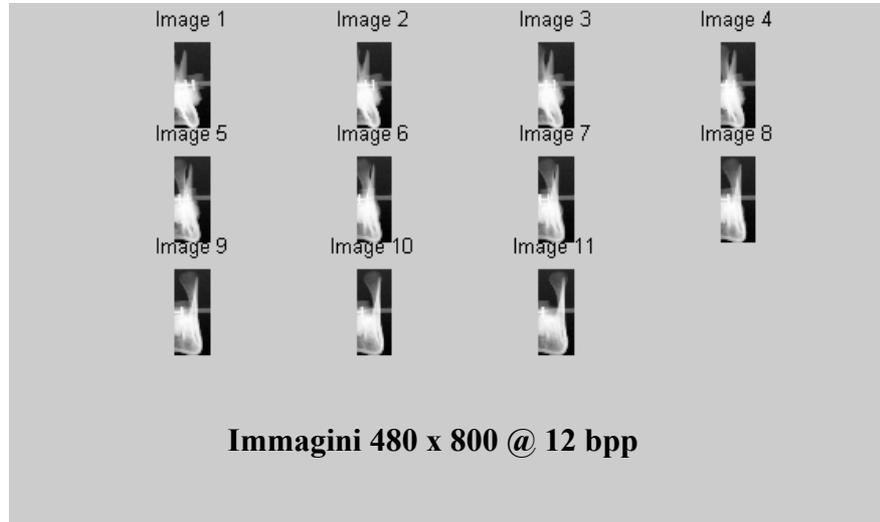
## Materiali di test e geometria



**Mandibola secca**



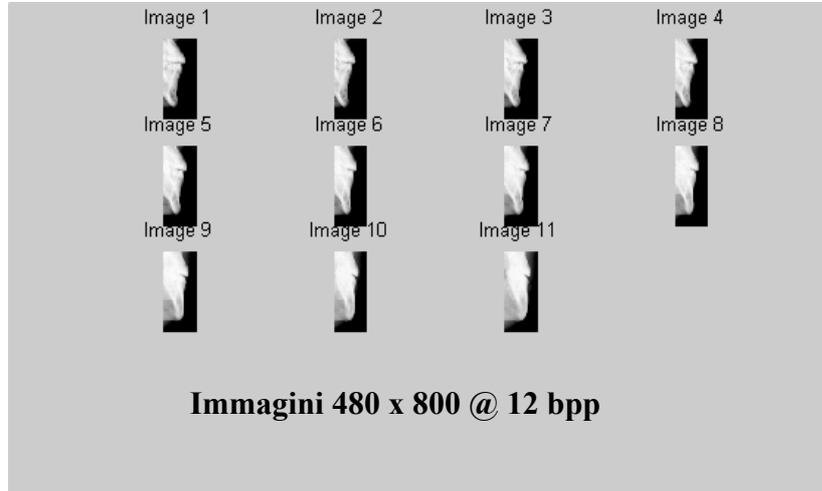
## Immagini acquisite::mandibola secca



**Ricostruzione di una  
mandibola secca  
(tempo: 47)  
30 sezioni (1mm)  
800 x 1000  
(0.1 x 0.1mm pixel size)**



# Immagine acquisite::fantoccio antropomorfo



LP filter    Stretch    Thresh     LP filter    Stretch    Thresh     LP filter    Stretch    Thresh

Load volume up    Art - Simple sampling, nearest interpolation    Load volume down    Art - Pepito - 60kV 15mA .m vol    Colormap gray

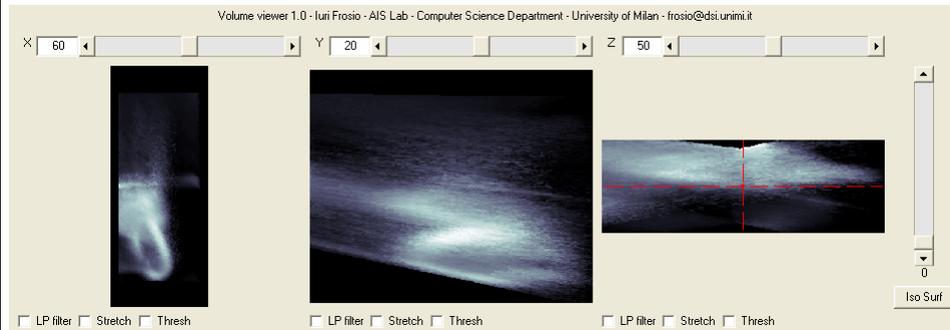
Iso Surf

**Ricostruzione di Fantoccio antropomorfo**  
**(tempo: 47)**  
**30 sezioni (1mm)**  
**800 x 1000**  
**(0.1 x 0.1mm pixel size)**

A    28/74    <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Ricostruzione con metodo ART



Tempo 640s

NB Con ART occorre ricostruire tutto il volume (10cm, 1mm la profondità del voxel => 100 x 640 x 800, pixel di 0,125mm), in tomosintesi solamente le slice sintetizzate.



## Sommario



- Tomografia lineare e tomosintesi
- Risultati sperimentali
- Problemi e soluzioni nella tomosintesi.**
- Blurring nella tomosintesi.
- Tecniche di deblurring nella tomosintesi.
- Formulazione iterativa del problema.



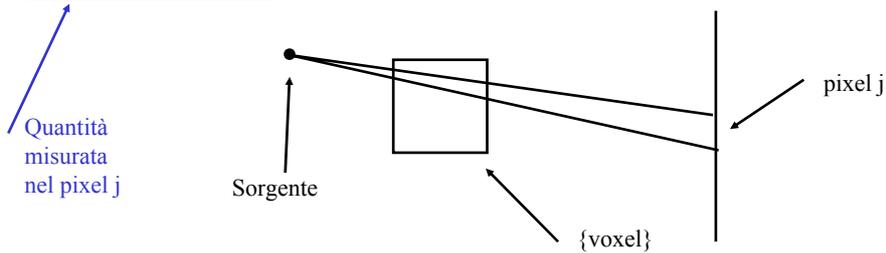
## Tomosintesi, problemi: misura su aree di dimensioni finite (pixel)



$$\ln(I(x)) - \ln(I_o) = - \sum_{k=1}^N \mu_k \Delta x$$

I  $\Delta x$  non sono più uguali ma sono sostituiti da  $\Delta V_k$ , la cui dimensione cresce all'allontanarsi dalla sorgente.

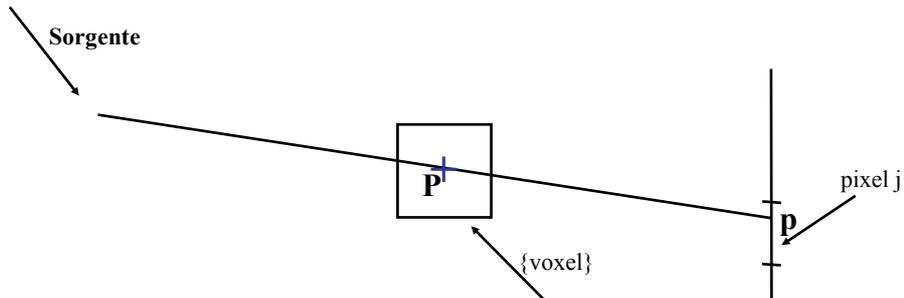
$$\ln(I_j) - \ln(I_o) = - \sum_{k=1}^N \mu_k \Delta V_k$$



E' un problema / caratteristica comune a tutte le formulazioni mediante metodi algebrici.



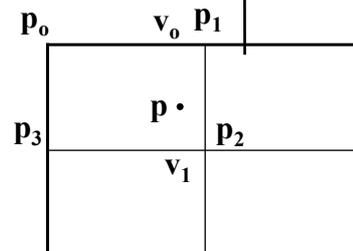
## Interpolazione bilineare



$$I(v_0) = I(p_0) (1 - \Delta x) + I(p_1) \Delta x$$

$$I(v_1) = I(p_3) (1 - \Delta x) + I(p_2) \Delta x$$

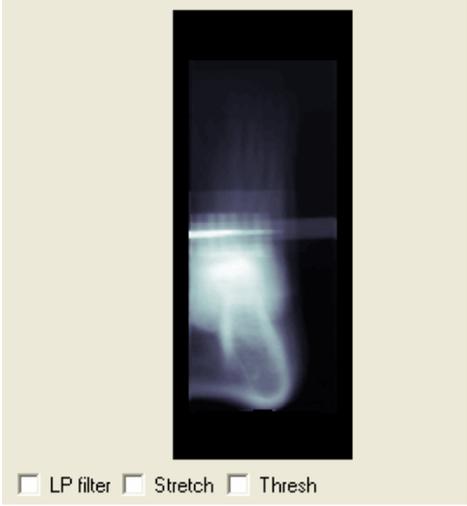
$$I(p) = I(v_0) (1 - \Delta y) + I(v_1) \Delta y$$





## Risultato con interpolazione bilineare



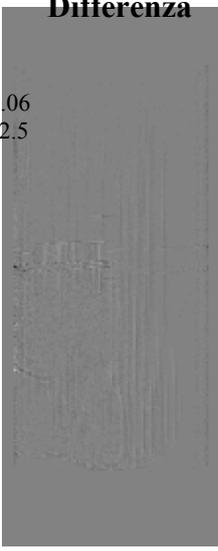


LP filter  
  Stretch  
  Thresh

Tempo elaborazione: 80s

Differenza

Range: -0.1 – 0.06  
Immagine: 0 – 2.5



A.A. 2005-2006

33/74

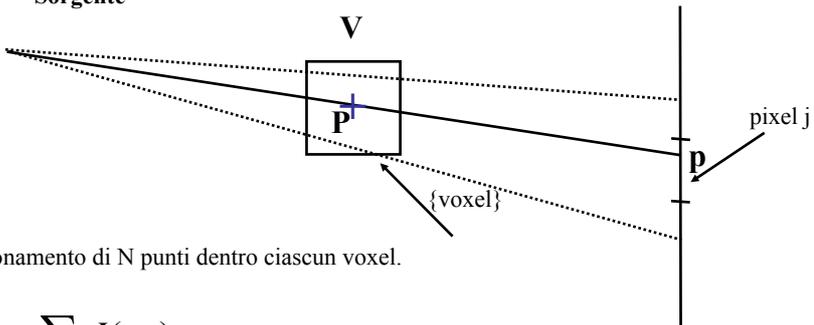
<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Supersampling



**Sorgente**



Campionamento di N punti dentro ciascun voxel.

$$\mu(\mathbf{V}) = \frac{\sum_k I(p_k)}{N}$$

A.A. 2005-2006

34/74

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Risultato con supersampling + interpolazione bilineare

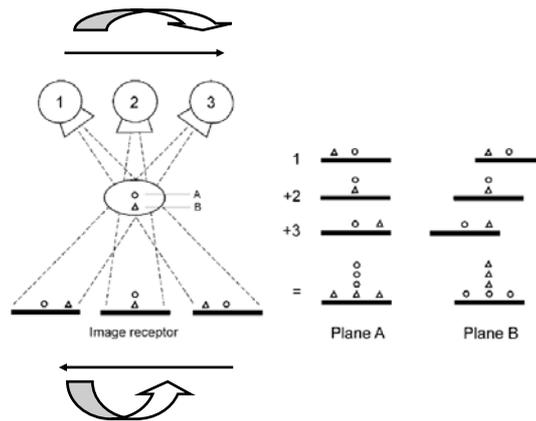


### Differenza

Range: -2.5 - 0.  
Immagine: 0 - 2.5  
Problema ai bordi



## Tomosintesi, problemi: spostamenti non rettilinei



Spostamenti rettilinei: geometria difficilmente realizzabile con apparecchiature general purpose (ingombri, cinematici). Si ricorre ad un movimento isocentrico o più in generale in cui sensore e generatore hanno un moto rototraslatorio.

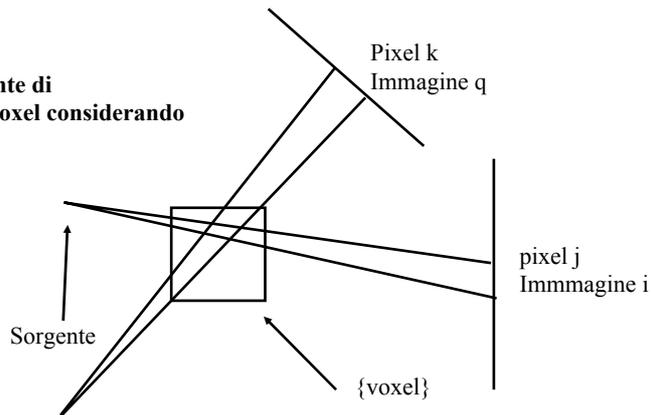


## Soluzione "ray-tracing"



Serve davvero?

Calcolo il coefficiente di assorbimento del voxel considerando tutti i contributi.



A.A. 2005-2006

37/74

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

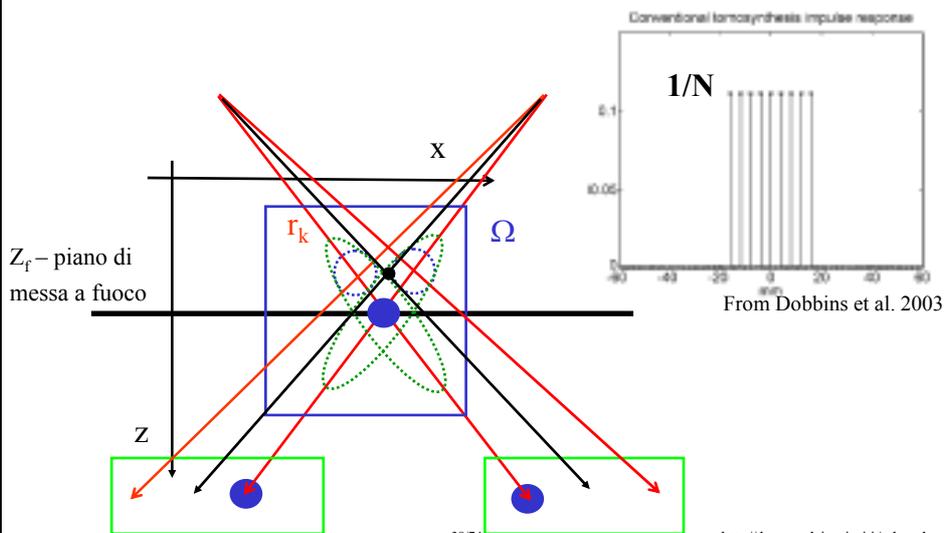


## Tomosintesi, problemi: risposta all'impulso



Strutture al di fuori del piano di messa a fuoco vengono viste "blurred" sul piano a fuoco.

:



A.A. 2005-2006

38/74

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Sommario



Tomografia lineare e tomosintesi  
 Risultati sperimentali  
 Problemi e soluzioni nella tomosintesi.  
**Blurring nella tomosintesi.**  
 Tecniche di deblurring nella tomosintesi.  
 Formulazione iterativa del problema.



## Calcolo dello shift ( $x = 0; z \neq z_f$ )



Obiettivo: allineare le immagini in modo opportuno ( $b_k \rightarrow x = 0$ )

From Dobbins et al. 2003

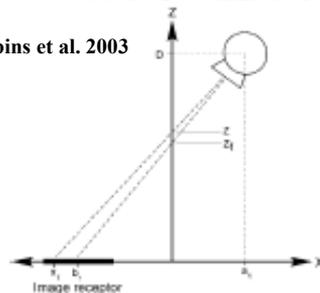


Figure 5. Geometry of shift-and-add tomography reconstruction.

Posizione sul piano  $x(y)$  del fulcro ripreso dalla posizione  $k$ :

$$b_k = a_k - \frac{D a_k}{D - z_f} = a_k (1 - m_f)$$

$b_k$  – posizione detettore, fissata dalla geometria di acquisizione: posizione x-ray emitter ( $a_k$ ) e fulcro ( $x, z_f$ ).

Posizione sul piano immagine di un impulso in  $x = 0$  e  $z = z \neq z_f$  (**piano di messa a fuoco**):

$$x_k(z) = a_k (1 - m_z)$$

Lo shift rispetto al punto centrale del detettore, immagine del fulcro,  $b_k$ , sarà:

$$\Delta x(x = 0; z) = x_k(z) - b_k = a_k (m_f - m_z)$$



## Piano tomosintetizzato ( $T_z | x = 0; z \neq z_f$ )



From Dobbins et al. 2003

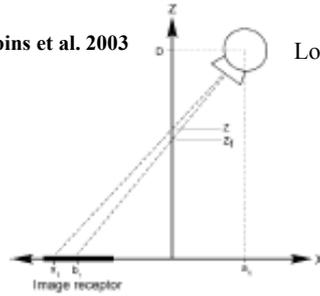


Figure 3. Geometry of shift-and-add tomography reconstruction.

Lo shift da applicare, calcolato per  $z \neq z_f; x = 0$ , sarà:

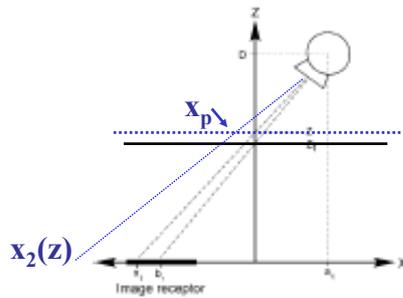
$$\text{shift}_k(x = 0; z) = \Delta x(x = 0; z) = -(x_k(z) - b_k) = a_k(m_z - m_f)$$

Per mettere a fuoco devo quindi traslare i punti sul piano immagine, in modo tale che il punto  $x = 0$  si trovi nella posizione  $x = b_k$ . Questa traslazione dovrà essere fatta per tutte le immagini.

$$T_z(x' = 0, y) = \frac{\sum_k I_k(x', y) \otimes \delta(x' - \text{shift}_k(x = 0; z))}{N}$$



## Imaging ( $x \neq 0, z \neq z_f$ )



$$-x_2(z) + a_k = D \frac{-x_p + a_k}{D - z}$$

Ricordando che:

$$\Delta x(x = 0; z) = -(x_k(z) - b_k) = a_k(m_z - m_f)$$

$$+ \Delta x_2(z) + b_k = a_k - D \frac{-x_p + a_k}{D - z} \rightarrow$$

$$\Delta x_2(z) = a_k(m_f - m_z) + \frac{Dx_p}{D - z}$$

Togliendo lo shift calcolato per  $x = 0, z \neq z_f$ , otteniamo la posizione di  $x_p$  sull'immagine, riferita al centro dell'immagine, quando i punti sull'immagine vengono shiftati in modo tale che  $b_k \rightarrow x = 0$ :

$$x_2(z) = b_k + \Delta x_2(z)$$

$$\Delta x_2(z) = m_z x_p \quad \forall a_k$$

$$x_2(z) = a_k(1 - m_z) + x_p m_z$$



## Piano tomosintetizzato ( $x \neq 0; z \neq z_f$ )



From Dobbins et al. 2003

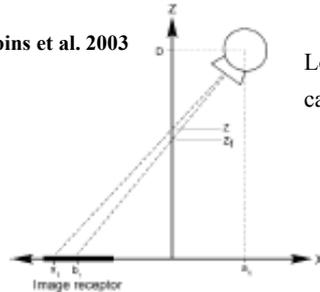


Figure 3. Geometry of shift-and-add tomography reconstruction.

Lo shift da applicare per ogni piano k, è stato calcolato per  $x = 0, z = z$  come:

$$\text{Shift}_k(z) = -\Delta x_k(z) = -(x_k(z) - b_k) = a_k(m_z - m_f)$$

Per mettere a fuoco devo quindi traslare i punti sul piano immagine, in modo tale che il punto  $x = 0$  si trovi nella posizione  $x = b_k$ . Questa traslazione dovrà essere fatta per tutte le immagini.

$$T_z(x', y) = \frac{\sum_k I_k(x', y) \otimes \delta(x' - \text{shift}_k(z))}{N}$$

$\forall x', y; \text{dato } z$   
 $\delta$  non dipende da  $x$



## Piano tomosintetizzato (verifica)

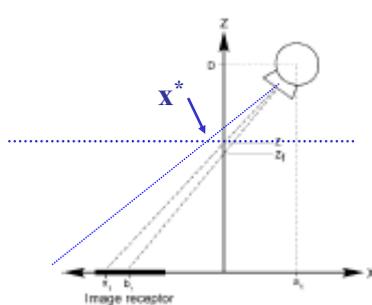


Figure 3. Geometry of shift-and-add tomography reconstruction.

Consideriamo un impulso in  $x = x^* z = z \neq z_f$

Lo shift da applicare per ogni punto del piano k, è:

$$\text{Shift}_k(z) = -a_k(m_z - m_f)$$

La posizione sul piano immagine di  $x^*$  è:

$$\Delta x^*(x = x^*; z) = a_k(m_f - m_z) + x_p m_z$$

$$T_z(x', y) = \frac{\sum_k \delta(x' - a_k(m_f - m_z) - x_p m_z) \otimes \delta(x' - \text{shift}_k(z))}{N} =$$

$$\frac{\sum_k \delta(x' - a_k(m_f - m_z) - x_p m_z + a_k(m_z - m_f))}{N} = \frac{\sum_k \delta(x' - x_p m_z)}{N}$$

La posizione dell'impulso sintetizzata viene spostata per un valore pari al fattore di ingrandimento

L'immagine tomosintetizzata sarà un'immagine magnificata dell'immagine originale



## Tomosintesi ricapitolazione



Per effettuare la tomosintesi (spostamento lineare) occorre allineare le immagini (shift tale da portare in  $x = 0$  il centro dell'immagine).

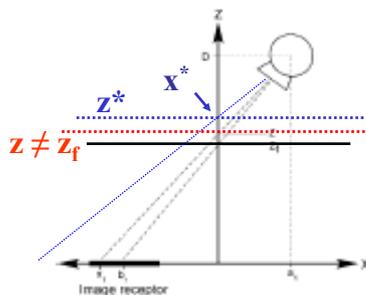
L'immagine ottenuta sommando le immagini shiftate sarà una versione (magnificata) dell'immagine reale.

Lo shift dipende dalla geometria:

- Dal fattore di magnificazione (che a sua volta dipende dalla distanza del piano di messa a fuoco dal fulcro).
- Dalla posizione dell'emettitore.



## Funzione di blurring ( $x^* = 0, z = z^* \neq z_f$ )



Hp: Impulso in  $x^* = 0, z = z^*$

L'immagine di questo impulso sull'immagine  $k$  è l'impulso in posizione:

$$I_k(x', y) = \delta(x' - a_k(m_f - m_z^*))$$

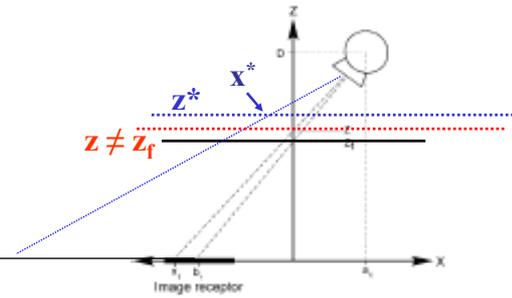
$$T_z(x', y)_k = I_k(x', y) \otimes \delta(x' - \text{shift}_k(z)) = \delta(x' - (a_k(m_f - m_z^*) - \text{shift}_k(z)))$$

$$T_z(x', y)_k = \delta(x' - a_k(m_f - m_z^*) - a_k(m_z - m_f)) = \delta(x' - a_k(m_z - m_z^*)) \quad \text{Dipende da } a_k$$

$$T_z(x', y) = \frac{\sum_k \delta(x' - a_k(m_z - m_z^*))}{N} \quad \text{N impulsi in posizione } a_k(m_z - m_z^*).$$



## Funzione di blurring ( $x^* \neq 0, z = z^* \neq z$ )



Hp: Impulso in  $x^* \neq 0, z = z^*$

L'immagine di questo impulso sull'immagine  $k$  è l'impulso in posizione (rispetto al centro dell'immagine):

$$I_k(x'_k, y) = \delta(x' - x(z=z^*; x=x^*)) = \delta\left(x' - a_k(m_z - m_{z^*}) - \frac{D x^*}{D - z^*}\right)$$

$$T_z(x', y)_k = I_k(x', y) \otimes \delta(x' - \text{shift}_k(z)) = \delta(x' - x'_k(z = z'; x = x^*) - \text{shift}_k(z))$$

$$T_z(x', y)_k = \delta(x' - a_k(m_z - m_{z^*}) - x^* m_{z^*})$$

**Dipende da  $a_k$  e da  $x^*$**

$$T_z(x', y) = \frac{\sum_k \delta(x' - a_k(m_z - m_{z^*}) - x^* m_{z^*})}{N}$$

**N impulsi in posizione  $a_k(m_z - m_{z^*}) + x^* m_{z^*}$**



## Sommario



- Tomografia lineare e tomosintesi
- Risultati sperimentali
- Problemi e soluzioni nella tomosintesi.
- Blurring nella tomosintesi.
- Tecniche di deblurring nella tomosintesi.**
- Formulazione iterativa del problema.



## Deblurring: ipotesi di base



Risposta all'impulso **spazio invariante**:  $h(x) \quad \forall x$ .

$T_k(x)$  – Immagine tomosintetizzata del piano  $k$  (dati ricostruiti).

$f_k(x)$  – Immagine dei coefficienti di assorbimento sul piano  $k$  (dati reali).

$h_{i \rightarrow j}(|x - x'|)$  Immagine sul piano  $j$  di un impulso in  $x'$  sul piano  $i$  (blurring function)

$h(\cdot)$  è supposta normalizzata (ad esempio viene stirata).

Esempio su 3 piani: Gosh-Roy, 1984.

Estensione a geometrie arbitrarie: Kolitsi et al., 1992



## Formazione dell'immagine tomosintetizzata



$$T_0(x) = f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) + f_1(x) \otimes h_{1 \rightarrow 0}(x) + f_{-1} \otimes h_{-1 \rightarrow 0}$$

$$T_1(x) = f_1(x) \otimes h_{1 \rightarrow 1}(x) + f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) + f_{-1} \otimes h_{-1 \rightarrow 1}$$

$$T_{-1}(x) = f_{-1}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow -1}(x) + f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow -1}(x) + f_1 \otimes h_{1 \rightarrow -1}$$

$$f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) = T_0(x) - f_{-1}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow 0}(x) + f_{+1} \otimes h_{+1 \rightarrow 0}$$

$$f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) = T_1(x) - f_1(x) \otimes h_{1 \rightarrow 1}(x) + f_{-1} \otimes h_{-1 \rightarrow 1}$$

$$f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow -1}(x) = T_{-1}(x) - f_{-1}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow -1}(x) + f_1 \otimes h_{1 \rightarrow -1}$$



## Derivazione di $f_0(x)$



$$f_0(x) \otimes (h_{0 \rightarrow 1}(x) + h_{0 \rightarrow -1}(x)) = T_1(x) + T_{-1}(x) - \\ f_{-1}(x) \otimes (h_{-1 \rightarrow -1}(x) + h_{1 \rightarrow -1}(x)) - f_1(x) \otimes (h_{1 \rightarrow 1}(x) + h_{-1 \rightarrow 1}(x))$$

Supponiamo che la risposta all'impulso sia spazio invariante e che non dipenda da  $z$  (immagini scalate):

$$f_0(x) \otimes (h_{0 \rightarrow 1}(x) + h_{0 \rightarrow -1}(x)) = T_1(x) + T_{-1}(x) \\ - (f_{-1}(x) + f_1(x)) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) - f_{-1}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow 1}(x) - f_1(x) \otimes h_{1 \rightarrow -1}(x)$$



## Eliminazione di $f_1(x)$ e $f_{-1}(x)$



Supponiamo che la risposta all'impulso sia simmetrica:  $h_{i \rightarrow j} = h_{j \rightarrow i}$

E' un'ipotesi che può avere senso  $\delta\left(x^1 - a_k(m_f - m_z) - \frac{Dx^*}{D - z^*}\right)$  nel caso di posizioni simmetriche dell'emettitore rispetto all'asse centrale e nel caso in cui  $z \ll D$  nel qual caso  $m_z \approx 1$ .

$$2f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) = T_1(x) + T_{-1}(x) - \\ (f_{-1}(x) + f_1(x)) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) - (f_{-1}(x) + f_1(x)) \otimes h_{-1 \rightarrow 1}(x)$$

Convoluzione per  $h_{0 \rightarrow 1}$

$$-2f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) = -[T_1(x) + T_{-1}(x)] \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) + \\ (f_{-1}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) + f_1(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x)) \otimes h_{0 \rightarrow 0} + \\ (f_{-1}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1} + f_1(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x)) \otimes h_{-1 \rightarrow 1}$$



## Eliminazione di $f_1(x)$ e $f_{-1}(x)$



Ricordando che:

$$T_0(x) = f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) + f_1(x) \otimes h_{1 \rightarrow 0}(x) + f_{-1} \otimes h_{-1 \rightarrow 0}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} -2f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) &= -[T_1(x) + T_{-1}(x)] \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) + \\ & (T_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) - f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) + \\ & (T_0(x) \otimes h_{-1 \rightarrow 1} - f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow 1}(x) \end{aligned}$$

E quindi:

$$\begin{aligned} f_0(x) \otimes [h_{0 \rightarrow 0}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) + h_{0 \rightarrow 0}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow 1}(x) - 2h_{0 \rightarrow 1}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x)] = \\ T_0(x) \otimes [h_{0 \rightarrow 0}(x) + h_{-1 \rightarrow 1}(x)] - [T_{-1}(x) + T_1(x)] \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) \end{aligned}$$



## Osservazioni



$$\begin{aligned} f_0(x) \otimes [h_{0 \rightarrow 0}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) + h_{0 \rightarrow 0}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow 1}(x) - 2h_{0 \rightarrow 1}(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x)] = \\ T_0(x) \otimes [h_{0 \rightarrow 0}(x) + h_{-1 \rightarrow 1}(x)] - [T_{-1}(x) + T_1(x)] \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) \end{aligned}$$

Prese tre immagini  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , l'immagine del piano tomosintetizzato,  $f_0$ , filtrato è ottenuta. Il filtro su  $f_0$  ha una forma complessa, è tendenzialmente un passa alto.

Per ricavare  $f_0$  occorre applicare la deconvoluzione. Si può passare al dominio delle frequenze. Il problema è mal-posto... Regolarizzazione.....

Equazioni simili si possono derivare quando non vale l'ipotesi di simmetria della risposta all'impulso.

Ghosh-Roy ed il gruppo di Pallikaris hanno esteso questa derivazione a traiettorie arbitrarie.



## Matrix inversion Tomosynthesis (Dobbins et al., 2001)



$$T_0(x) = f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 0}(x) + f_1(x) \otimes h_{1 \rightarrow 0}(x) + f_{-1} \otimes h_{-1 \rightarrow 0}$$

$$T_1(x) = f_1(x) \otimes h_{1 \rightarrow 1}(x) + f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow 1}(x) + f_{-1} \otimes h_{-1 \rightarrow 1}$$

$$T_{-1}(x) = f_{-1}(x) \otimes h_{-1 \rightarrow -1}(x) + f_0(x) \otimes h_{0 \rightarrow -1}(x) + f_1 \otimes h_{1 \rightarrow -1}$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & \dots & F_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & \dots & F_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \dots \\ S_n \end{pmatrix}$$

Sistema lineare nel dominio delle frequenze.

Tempo di filtraggio di 1024 x 1024 x 19:  
1 minuto su workstation.

Problemi:

- finestratura
- approssimazione dello scalino
- basse frequenze sono mal-condizionate.

Ancora molto lavoro per renderla adatta.

Utilizza funzione costo quadratica e rumore Gaussiano

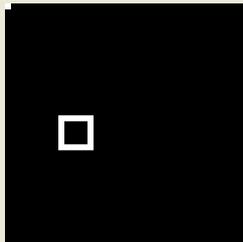


## Dati simulati per il deblurring

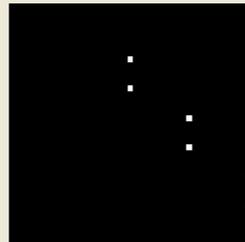


Volume viewer 1.0 - Iuri Frosio - AIS Lab - Computer Science Department - University of Milan - frosio@dsi.unimi.it

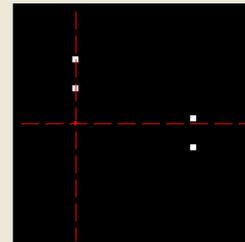
X | 2.593 | Y | 5.125 | Z | 5.125



LP filter  Stretch  Thresh

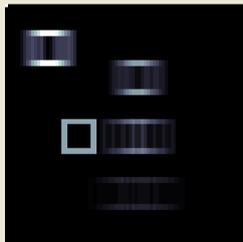


LP filter  Stretch  Thresh

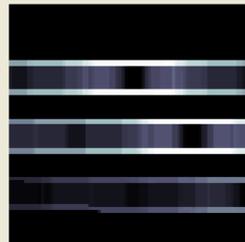


LP filter  Stretch  Thresh

Iso Surf



LP filter  Stretch  Thresh



LP filter  Stretch  Thresh



LP filter  Stretch  Thresh

Iso Surf

Load volume up

Volume.vol

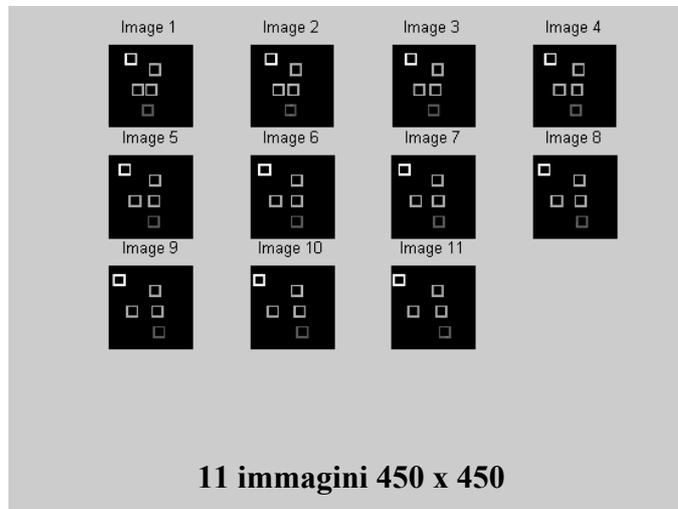
Load volume down

Tomos.vol

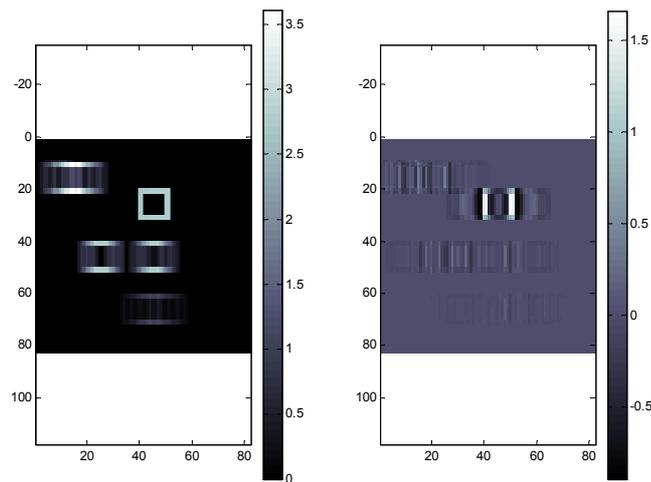
Colormap bone



## Le immagini acquisite



## Effetto del deblurring



Cancellazione delle strutture  
Effetto passa alto



## Sommario



Tomografia lineare e tomosintesi  
Risultati sperimentali  
Problemi e soluzioni nella tomosintesi.  
Blurring nella tomosintesi.  
Tecniche di deblurring nella tomosintesi.  
**Formulazione iterativa del problema.**



## Ricostruzione è un problema mal posto



Esempio:

11 immagini,  $1040 \times 422$  pixels = 4.827.680 misure

Volume  $30 \times 320 \times 800 = 7.680.000$  voxels (incognite)

Incognite > Numero di equazioni

Problema malposto (non ha soluzioni / la soluzione non è unica)

Problema mal condizionato (piccole perturbazioni dei dati possono dare soluzioni diverse – sensibilità al rumore)

Soluzione -> Regolarizzazione



## Cost functions



- Data mismatch term;
- Regularization term (with regularization parameter  $\beta$ );
- Constraint (non negativity).

Cost function:  $\Phi(x) = \text{Mismatch}(y, Ax) + \beta \cdot \text{Roughness}(x)$

Minimization:  $x = \text{argmin}[\Phi(x)], x \geq 0$ .

Measured absorption coeffs.

Estimated absorption coeffs.

Projection matrix



## Data mismatch term



Mismatch =  $\text{Mismatch}(y, Ax)$

Least squares:  $(y - Ax)(y - Ax)^T \dots$  but noise depends on  $x$  (Poisson noise)!

Possible solution: weighted least squares (peso è funzione di  $y \dots$ )

What about the faithfulness to statistical model?

Statistical model errors may corrupt the solution.

Weights may bias the solution.



## Data mismatch term::Massima verosimiglianza



A theoretically more correct approach: maximum likelihood (ML).

Observations:  $y$   
Estimated data:  $x$

Probability of an observation:  $p([y]_i|[Ax]_i)$ , derived from  $[y]_i \sim \text{Poisson}([y]_i)$ ,  $i^{\text{th}}$  ray

Note: for  $y_i \gg 0$ ,  $\text{Poisson}(y_i) \sim \text{Gaussian}(y_i, y_i)$

Likelihood function:  $L = \prod_i p([y]_i|[Ax]_i)$

Minimize  $-\log(L) = -\log[\prod_i p([y]_i|[Ax]_i)] = -\sum_i \log[p([y]_i|[Ax]_i)]$



## Regularization term



- Noise reduction methods
- True regularization methods



## Noise reduction methods



- Filter (denoise) data (sinogram, images);
- Extrapolate missing data;
- Stop algorithm before convergence;
- Run to convergence and low-pass filter solution;
- Low-pass filter solution at each iteration;
- Modify update at each iteration (e.g. eliminate high frequencies).
  
- **Advantages:**
  - Simple;
  - Familiar;
  - Easily controllable (number of iteration, amount of smoothing);
  - Changing post-smoothing does not require reiterating.

Miller et al., Selection of task dependent diffusion filters for the post processing of SPECT images, J. Nuc. Med., 1992.

Tanaka, Improved iterative image reconstruction with automatic noise artifact suppression, IEEE Trans. Med. Imag., 1992.



## True regularization methods



- Use bigger voxels (implicit low-pass filtering)... Unappealing!
- Add a prior (roughness penalty) to the cost function:  $\Phi(x) = L(x) + \beta \cdot R(x)$
  
- Advantages:
  - Stability;
  - Faster convergence;
  - Predictability;
  - Controlled resolution (es. edge preserving).
  
- Disadvantages:
  - Apparently subjective choice of  $R(x)$ ;
  - Apparently difficulty in choosing  $\beta$ .

Sinderet al., The use of sieves to stabilize images produced with the EM algorithm for emission tomography, IEEE Trans. Nuc. Sci., 1985.



## Penalty function $R(x)$



- Computation / algorithm complexity (avoid complex  $R(x)$ );
- Uniqueness of minimizer (avoid creation of multiple minima through introduction of  $R(x)$ );
- Resolution properties (e.g. edge preserving, avoid simple smoothing  $R(x)$ );
- Number of parameters, predicability of properties (avoid multi parameter  $R(x)$ ).



## Separable $R(x)$



- Norm:
  - $R(x) = \frac{1}{2} x^T I x = \sum_i x_i^2$ ;
- Entropy:
  - $R(x) = \sum_i x_i \cdot \log(x_i)$ ;
- ... In general:
  - $R(x) = \sum_i f(x_i)$ .
- Advantages: easy to compute
- Disadvantages: smoothness is not explicitly enforced.

Tikonov et al., Solution of ill-posed problems, 1977.

Csiszar, Why least squares and maximum entropy? An axiomatic approach to inference for linear inverse problems, Ann. Stat., 1991.

A. R. De Pierro, A modified expectation maximization algorithm for penalized likelihood estimation in emission tomography, IEEE Trans. Med. Imag., 1995.



## Not Separable $R(x)$



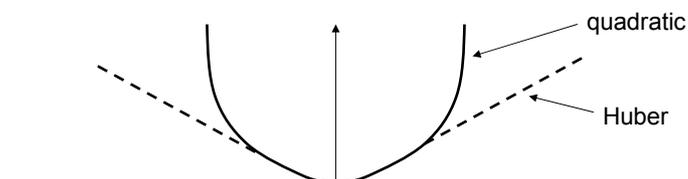
- First order neighborhood:
  - $R(x) = \sum_i \sum_j f(x_i - x_j)$ , ( $x_j$  = neighbors of  $x_i$ )
  - E.g.  $f$  = squared gradient, second derivative, ...
- Advantages: smoothness is explicitly enforced.
- Disadvantages: not easy to compute



## Edge preserving $R(x)$



- Non quadratic (es. Huber function), not separable :
  - $R(x) = \sum_i H[\text{grad}(x_i)]$ ,
  - $H(t) = \frac{1}{2} t^2$  if  $|t| < \delta$ ,  $\frac{1}{2} [\delta \cdot |t| - \delta^2]$  elsewhere, edge preserving.



Chlewski et al., Noise reduction and convergence of Bayesian algorithm with blobs based on the Huber function and median root prior”, PMB, 2004.



## R(x): constraint



- Non negativity, upper / lower bounds;
- Known support;
- Count preserving.
  
- Also in this case, algorithm complexity, slow convergence rate or biased solution have to be avoided
  
- Non negativity  $\rightarrow$  at each iteration:
  - $x^n = \max(0, x^{n-1})$



## Dalla funzione costo alla ricostruzione



- Method = cost function + minimization algorithm
  
- Minimization algorithm:
  - Non negativity?
  - Parallelization?
  - Convergence rate?
  - Monotonicity?



## Minimization algorithms



- Non gradient based:
  - Exhaustive search... slow;
- Gradient based:
  - Gradient descent ( $\alpha_n = \text{cost}$ ), steepest descent :  
 $x^{n+1} = x^n - \alpha_n \text{grad } \Phi(x^n) \dots$  linear convergence;
- Newton's method:
  - $x^{n+1} = x^n - \alpha_n [\text{Hess } \Phi(x^n)]^{-1} \text{grad } \Phi(x^n) \dots$  quadratic convergence, computing H often expensive.
  
- For imaging: Expectation Maximization EM (surrogate function + minimization surrogate function).
  
- A. R. De Pierro, On the relation between the ISRA and the EM algorithm for positron emission tomography, IEEE Trans. Med. Imag., 1993.



## Sommario



Tomografia lineare e tomosintesi  
Risultati sperimentali  
Problemi e soluzioni nella tomosintesi.  
Blurring nella tomosintesi.  
Tecniche di deblurring nella tomosintesi.  
Formulazione iterativa del problema.