Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Docenti: M. Goldwurm, S. Aguzzoli

Appello del 5 settembre 2003

Progetto "Skyline"
Consegna entro il 23 settembre 2003

Il problema

La *skyline* di una città è il profilo che i suoi palazzi ed edifici delineano quando essa è osservata da una qualche angolazione.

Obiettivo del progetto è studiare i profili originati dalla disposizione di *edifici* di forma semplificata (parallelepipedi) nell'area piana di una città.

Formalmente la *città* è rappresentata dal piano P di equazione $z = 0$ in uno spazio euclideo tridimensionale:

$$P = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Un edificio è un parallelepipedo la cui base poggia sul piano P della città, ed è completamente specificato dai parametri:

- Coordinate del vertice inferiore sinistro della base: $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$
- x-estensione della base: $0 < l_x \in \mathbb{Z}$.
- y-estensione della base: $0 < l_y \in \mathbb{Z}$.
- Altezza: $0 < h \in \mathbb{Z}$.

Dunque, denoteremo con $E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)$ l'edificio descritto dal seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$E(x_0, y_0, l_x, l_y, h) = \{(x, y, z) \mid x_0 \leq x \leq x_0 + l_x,\ y_0 \leq y \leq y_0 + l_y,\ 0 \leq z \leq h\}.$$

La *x-proiezione* dell'edificio $E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)$ è l'insieme $\{(x, 0, z) \mid (x, y_0, z) \in E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)\}$.

La *y-proiezione* dell'edificio $E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)$ è l'insieme $\{(0, y, z) \mid (x_0, y, z) \in E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)\}$.

L'*x-profilo* di una città è dato dalla unione delle x-proiezioni degli edifici presenti in città unita alla retta delle ascisse $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. L'*$y$-profilo* di una città è dato dalla unione delle y-proiezioni degli edifici presenti in città unita alla retta delle ordinate $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

La città nasce inizialmente vuota. La costruzione di un nuovo edificio avverrà specificandone i parametri nell'operazione di introduzione.

È possibile sovrapporre edifici, tali sovrapposizioni contribuiscono a definire un isolato (nota che la sovrapposizione di due o più edifici va pensata come la "fusione" degli edifici in questione, vale a dire le parti in sovrapposizione costituiscono l'intersezione insiemistica degli edifici suddetti).

Un *isolato* è un'unione di edifici connessa e massimale: Un'unione U di edifici è connessa se ogni due punti appartenenti ad U sono congiungibili da una spezzata completamente giacente in U (ricordiamo che una spezzata è una curva continua costituita da una successione finita di segmenti). Un'unione connessa di edifici è massimale se non è possibile aggiungervi alcun edificio già presente in città senza perdere la connessione.

Il *volume* di un isolato è il volume geometrico dell'isolato inteso come sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

Dunque un punto (x, y, z) può appartenere a nessuno o a uno o a più edifici, ed appartiene ad almeno un edificio se e solo se appartiene ad un unico isolato.

Nella città possono essere costruite delle strade che a volte richiedono la demolizione di parti di edifici.

Una y-*strada* è specificata dalla sua ampiezza $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Formalmente:

$$yS(a, b) = \{(x, y, 0) \mid a < y < b,\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Una x-*strada* è specificata dalla sua ampiezza $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$. Formalmente:

$$xS(c, d) = \{(x, y, 0) \mid c < x < d,\, y \in \mathbb{R}\}.$$

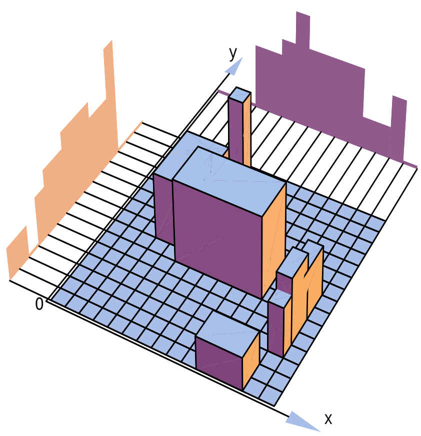
La costruzione della y-strada $yS(a, b)$ prevede la demolizione di tutte le parti di edifici che occupano lo spazio per cui deve passare la strada: tali demolizioni comportano la modifica degli edifici stessi in accordo con la procedura seguente.

Sia $E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)$ un generico edificio presente al momento della costruzione della strada $yS(a, b)$. Si consideri l'insieme E':

$$E' = E(x_0, y_0, l_x, l_y, h) \setminus \{(x, y, z) \mid (x, y, 0) \in yS(a, b),\, z \in \mathbb{R}\}.$$

Si noti che E' può in genere non essere esprimibile come un unico parallelepipedo, ma sempre come l'unione di un numero finito di parallelepipedi e di un numero finito di rettangoli: tali rettangoli rappresentano facciate "residue" di edifici per il resto demoliti (ad esempio la y-strada $ys(8, 15)$ demolisce tutto l'edificio $E(25, 8, 10, 3, 7)$ tranne la sua facciata $\{(x, 8, z) \mid 25 \leq x \leq 35,\, 0 \leq z \leq 7\}$). Possiamo dunque ritenere E' un'unione finita (e in genere non connessa) di edifici e di facciate "residue". Per terminare l'opera di demolizione, consideriamo ora l'insieme E'' ottenuto sottraendo a E' ogni facciata "residua". Al termine della costruzione della strada, ogni edificio $E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)$ sarà stato rimpiazzato da un numero finito di edifici, precisamente quelli la cui unione costituisce l'insieme E''.

Analoghe considerazioni si applicano alla costruzione di x-strade $xS(c, d)$.



Nell'esempio raffigurato sono presenti i seguenti edifici: $E(3,7,3,4,4)$, $E(5,6,6,3,5)$, $E(6,11,1,1,7)$, $E(10,0,3,2,2)$, $E(13,3,1,5,3)$, $E(13,4,1,2,4)$. Essi danno origine a 3 isolati, di seguito listati: 1) $E(3,7,3,4,4) \cup E(5,6,6,3,5) \cup E(6,11,1,1,7)$, 2) $E(10,0,3,2,2)$, 3) $E(13,3,1,5,3) \cup E(13,4,1,2,4)$. Il volume dell'isolato 1) è

$$(3 \times 4 \times 4) + (6 \times 3 \times 5) - (1 \times 2 \times 4) + (1 \times 1 \times 7) = 137.$$

I profili sono riportati in figura, dove l'x-profilo per comodità è mostrato sullo sfondo della città. Usando la specifica data nel seguito sul formato di output dei profili, i profili sono identificati dalle seguenti liste di vertici:

$x -$ profilo		$y -$ profilo	
3	0	0	0
3	4	0	2
5	4	2	2
5	5	2	0
6	5	3	0
6	7	3	3
7	7	4	3
7	5	4	4
11	5	6	4
11	2	6	5
13	2	9	5
13	4	9	4
14	4	11	4
14	0	11	7
		12	7
		12	0

Si noti che per definizione ai profili appartengono sempre le rette corrispondenti agli assi cartesiani x, y, dunque il segmento di estremi $(0,2,0), (0,3,0)$ appartiene all'y-profilo della città. La costruzione della y-strada $yS(5,7)$ determina la parziale demolizione dei tre edifici $E(5,6,6,3,5)$, $E(13,3,1,5,3)$ e $E(13,4,1,2,4)$. In particolare l'edificio $E(5,6,6,3,5)$ viene rimpiazzato dall'unico edificio $E(5,7,6,2,5)$, mentre l'edificio $E(13,3,1,5,3)$ viene rimpiazzato dai due edifici $E(13,3,1,2,3)$ e $E(13,7,1,1,3)$ e l'edificio $E(13,4,1,2,4)$ dall'edificio $E(13,4,1,1,4)$. L'y-profilo viene alterato dalla costruzione di $yS(5,7)$ eliminando da esso tutti i punti della forma $(0, y, z)$ per $5 < y < 7$, mentre in questo caso l'x-profilo rimane inalterato. La costruzione della y-strada $yS(4,7)$ determina invece la completa demolizione dell'edificio $E(13,4,1,2,4)$ (che viene rimpiazzato da $\emptyset$) e l'alterazione anche dell'x-profilo che in tal modo perde tutti i punti $(x, 0, z)$ con $13 < x < 14$, $3 < z \leq 4$.

Si richiede di implementare una struttura dati efficiente che permetta di eseguire le operazioni seguenti (si tenga presente che la minima porzione rettangolare di piano contenente tutte le basi di edifici è in genere molto grande rispetto al numero di edifici, quindi *non è sicuramente efficiente rappresentare il piano mediante una matrice*).

- **crea**()

  Crea una città inizialmente vuota, distruggendo tutti gli edifici attualmente presenti.

- **inserisci**(x_0, y_0, l_x, l_y, h)

  Inserisce nella città l'edificio $E(x_0, y_0, l_x, l_y, h)$.

- **elimina**(x, y)

  Elimina dalla città ogni edificio la cui base contiene il punto $(x, y, 0)$.

- **isolati**()

  Restituisce il numero di isolati presenti in città.

- **volume**(x, y)

  Restituisce il volume dell'isolato contenente il punto $(x, y, 0)$. Restituisce 0 se $(x, y, 0)$ non appartiene ad alcun edificio.

- x-**profilo**()

  Restituisce l'x-profilo della città secondo il formato specificato nell'apposita sezione.

- y-**profilo**()

  Restituisce l'y-profilo della città secondo il formato specificato nell'apposita sezione.

- y-**strada**(y_0, y_1)

  Costruisce la y-strada $yS(y_0, y_1)$.

- x-**strada**(x_0, x_1)

  Costruisce la x-strada $xS(x_0, x_1)$.

Specifiche di implementazione

Il programma deve leggere dallo standard input (`stdin`) una sequenza di linee (separate da `\n`), ciascuna delle quali corrisponde a una linea della prima colonna della Tabella 1, dove x, y, l, m, h sono numeri naturali e i vari elementi sulla linea sono separati da uno o più spazi. Quando una linea è letta viene eseguita l'operazione ad essa associata e viene stampato l'eventuale output prodotto dall'esecuzione dell'operazione associata; tutte le operazioni di stampa sono effettuate sullo standard output (`stdout`) e ogni operazione deve iniziare su una nuova linea.

Formato per l'output di profili di città

Siano x_{min} e x_{max} rispettivamente le ascisse minima e massima dei punti appartenenti alle x-proiezioni degli edifici della città. Sia H il sottoinsieme dell'x-profilo della città costituito dai punti $(x, 0, z)$ per i quali vale $x_{min} \leq x \leq x_{max}$. H è l'unione di un numero finito di rettangoli e del segmento $\{(x, 0, 0) \mid x_{min} \leq x \leq x_{max}\}$: H è connesso e il suo contorno è dunque una successione finita di segmenti, alternatamente orizzontali (aventi z costante) e verticali (aventi x costante). L'intersezione di ogni coppia di segmenti consecutivi origina un vertice $(x, 0, z) \in \mathbb{Z}^3$. Sia $(x_1, 0, z_1)$ il primo di tali vertici secondo l'ordine lessicografico: $(x, 0, z) < (x', 0, z')$ se e solo se $(x < x')$ o $(x = x'$ e $z < z')$. Necessariamente $z_1 = 0$ e $x_1 = x_{min}$. Il vertice $(x_1, 0, z_1)$ sarà il primo vertice della nostra presentazione di H. Dato l'i-esimo vertice $(x_i, 0, z_i)$, l'$(i + 1)$-esimo vertice sarà il vertice immediantamente successivo a $(x_i, 0, z_i)$ nella visita dei vertici di H in ordine orario. L'ultimo vertice $(x_u, 0, z_u)$ di H è $(x_{max}, 0, 0)$. Avendo costruito la successione $(x_1, 0, z_1), (x_2, 0, z_2), \ldots, (x_i, 0, z_i), \ldots, (x_u, 0, z_u)$ dei vertici di H, la si

Linea di input	Operazione
`c`	**crea** ()
`i` x y l m h	**inserisci** (x, y, l, m, h)
`e` x y	**elimina** (x, y)
`I`	**isolati** ()
`v` x y	**volume** (x, y)
`x`	x-**profilo** ()
`y`	y-**profilo** ()
`Y` x y	y-**strada** (x, y)
`X` x y	x-**strada** (x, y)
`f`	Termina l'esecuzione del programma

Tabella 1: Specifiche del programma

emetta in output secondo il formato seguente:

$$\begin{array}{ll} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & z_i \\ \vdots & \vdots \\ x_u & z_u \end{array}$$

Analoghe specifiche si applicano all'output di y-profili considerando vertici della forma $(0, y, z)$ al posto di $(x, 0, z)$ ed adattando le precedenti definizioni in modo naturale.

Nota: Non devono essere presenti vincoli sulla dimensione del piano, degli edifici e delle strade e sul numero di edifici (se non quelli determinati dal tipo di dato intero). Non si richiede – anzi si sconsiglia – l'uso di grafica, se non per test personali: in modo particolare, non si usi `conio.h` e neppure `clrscr()`.

Nota: Per semplicità si suppone che l'input sia sempre conforme alle specifiche di Tabella 1, per cui non è necessario controllare la correttezza dell'input.

Esempio

Si supponga che le linee di input siano:

```
c
i 4 6 5 6 2
i 2 8 14 2 4
i 13 4 2 7 7
I
i 11 13 2 2 7
```

```
I
v 2 10
x
y
X 6 8
I
v 5 10
e 5 10
I
Y 13 15
I
x
f
```

L'output prodotto dal programma deve essere:

```
1
2
234
2 0
2 4
11 4
11 7
15 7
15 4
16 4
16 0
4 0
4 7
11 7
11 2
12 2
12 0
13 0
13 7
15 7
15 0
3
48
2
1
8 0
8 4
13 4
13 7
15 7
15 4
16 4
16 0
```

Presentazione del progetto

Il progetto deve essere inviato per posta elettronica all'indirizzo `aguzzoli@dsi.unimi.it` entro il 23 settembre 2003. La discussione del progetto e l'esame orale si svolgeranno il 26 settembre 2003 alle 9:00 in aula da stabilirsi.

Occorre presentare:

1. il codice sorgente (rigorosamente ANSI C, compilabile con **gcc**);
2. una sintetica relazione (formato pdf o rtf) che illustra le strutture dati utilizzate e analizza il costo delle diverse operazioni richieste dalla specifica.

I due o più file (file sorgenti C + relazione) devono essere contenuti in un unico file `.zip` il cui nome dovrà essere `cognome.zip`. La relazione e il codice devono riportare il vostro nome, cognome e matricola.

Una copia cartacea della relazione e del codice deve inoltre essere consegnata al dr. Aguzzoli sempre entro il 23 settembre 2003 (lasciandola eventualmente nella sua casella postale presso il dipartimento in via Comelico).

Si ricorda infine di presentarsi alla prova orale con una copia stampata della relazione e del codice.

Per ogni ulteriore chiarimento:
E-mail: `aguzzoli@dsi.unimi.it`
Ricevimento: il mercoledì, ore 15-16, stanza S204.

Avvisi

La versione aggiornata del progetto è pubblicata in .pdf sul sito:
`http://homes.dsi.unimi.it/~aguzzoli/algo.htm`.
Si consiglia di consultare periodicamente questo sito per eventuali correzioni e/o precisazioni relative al testo del progetto.

Lo svolgimento del progetto è una prova d'esame da svolgere *individualmente*.

Non è possibile consegnare il progetto se non si è ancora superata la prova scritta.