Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Docenti: M. Trubian, S. Aguzzoli

Appello del 6 aprile 2004

Progetto "Filtri polari"
Consegna entro il 23 aprile 2004

Il problema

Obiettivo del progetto è studiare la polarizzazione di un segnale passante per filtri rettangolari disposti su un piano. Chiamiamo *piano* l'insieme dei punti

$$\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad | \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Usiamo la notazione $R(a, b, c, d)$ per denotare il rettangolo il cui vertice in basso a sinistra ha coordinate (a, b) e il vertice in alto a destra ha coordinate (c, d), dove $0 \leq a < c$ e $0 \leq b < d$. Formalmente:

$$R(a, b, c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq x \leq c, \ b \leq y \leq d\}.$$

Un rettangolo R è *incluso* in un rettangolo S se $R \subseteq S$ come insiemi di punti. Un rettangolo R è *incluso propriamente* in un rettangolo S se $R \subseteq S$ e $R \neq S$. Assumiamo che, dati due rettangoli R e S nel piano, valga una delle seguenti tre condizioni:

1. R è incluso in S;
2. S è incluso in R;
3. L'intersezione $I = S \cap R$ di S e R è al più *monodimensionale*, vale a dire: o $I = \emptyset$ o $I = \{v\}$ per v un vertice di R ed S, o i punti di I formano un segmento.

Quindi, un rettangolo R può essere inserito nel piano solo se, per ogni rettangolo S già presente nel piano, vale una delle tre condizioni 1,2,3. Una *catena da R_1 a R_h* è una sequenza di rettangoli $R_1, R_2, \ldots, R_h$ tali che R_i è incluso propriamente in R_{i+1} per $1 \leq i < h$; chiamiamo h la *lunghezza* di tale catena. Il *grado di annidamento* di un rettangolo R è la lunghezza della più lunga catena costituita da rettangoli inclusi propriamente in R. Il grado di annidamento del piano è la lunghezza della più lunga catena costituita da rettangoli contenuti nel piano. Si supponga ad esempio che nel piano siano presenti i rettangoli A, B, C, D, E, F, G, H disposti come nella Figura 1. Il rettangolo A ha grado di annidamento 3 (la più lunga catena è D, C, B); B ha grado di annidamento 2; C, E e G hanno grado di annidamento 1; D, F e H hanno grado di annidamento 0. Il piano ha grado di annidamento 4 (la più lunga catena è D, C, B, A).

Dati due rettangoli R e S, il *minimo inviluppo* di R e S è il più piccolo rettangolo contenente R e S e che può essere inserito nel piano. Il rettangolo tratteggiato nella figura rappresenta il minimo inviluppo di D e F; infatti, qualunque altro rettangolo contenente D e F più piccolo di quello tratteggiato, non può essere inserito nel piano perché o non include B oppure non include E (si veda l'ipotesi iniziale sui rettangoli nel piano). Si noti che il rettangolo tratteggiato è anche il minimo inviluppo di C e F, di C ed E, di B ed E, ecc. Il minimo inviluppo di A e B è A; il minimo inviluppo di B e H è il più piccolo rettangolo contenente A e G (e questo è anche il minimo inviluppo di C e H, di E e G, ecc.).

Si suppone che ogni punto del piano sia attraversato da uno stesso *segnale* polarizzato. In questo progetto siamo interessati unicamente alla direzione del segnale, che chiamiamo per l'appunto *polarità*. Essa è

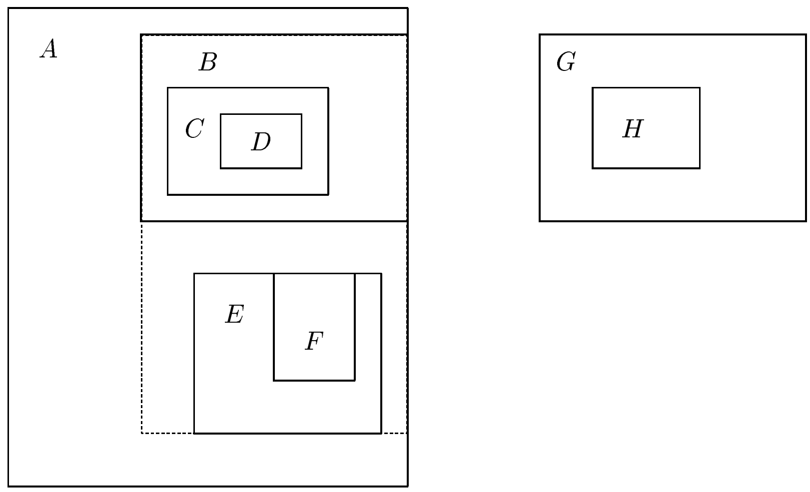

Figura 1: Un esempio

definita da una coppia di interi (x, y) tali che $y \geq 0$ ed il massimo comun divisore di x e y, in simboli $MCD(x, y)$, è uguale a 1. La polarità nulla è rappresentata da $(0, 0)$.

Si noti che ogni coppia di interi (a, b) *determina* una e una sola polarità, ottenuta dividendo sia a che b per $MCD(a, b)$ ed eventualmente, moltiplicando sia a che b per -1. Ad esempio la coppia di interi $(24, -12)$ specifica la polarità $(-2, 1)$, mentre $(-9, -6)$ specifica la polarità $(3, 2)$. Si noti che la polarità specificata da una coppia della forma $(0, y)$ è $(0, 1)$ mentre coppie della forma $(x, 0)$ determinano la polarità $(1, 0)$.

Indicheremo con $(x, y)^\circ$ la polarità determinata dalla coppia di interi (x, y). I rettangoli posti sul piano costituiscono dei *filtri* che modificano la polarità del segnale passante per i punti del piano coperti dai filtri medesimi. La sovrapposizione di due o più filtri ha un effetto cumulativo sulla distorsione della polarità del segnale passante per i punti coperti. Ogni filtro è descritto, oltre che dalla sua *forma* rettangolare, dalla polarità. Sia quindi (x, y) un punto nel piano e sia (σ_x, σ_y) la polarità del segnale che attraversa il piano. Sia $\{R_1, \ldots, R_k\}$ l'insieme dei filtri che contengono il punto (x, y) e sia, per ogni $i = 1, \ldots, k$, (x_i, y_i) la polarità associata al filtro R_i. La polarità (ρ_x, ρ_y) del segnale fuoriuscente dal punto (x, y) è data dalla differenza tra (σ_x, σ_y) e la somma delle polarità dei filtri calcolata nel modo seguente

$$(\rho_x, \rho_y) \;=\; \left(\sigma_x - \sum_{i=1}^{k} x_i \;,\; \sigma_y - \sum_{i=1}^{k} y_i\right)^\circ$$

Notiamo che le coppie (σ_x, σ_y) e (x_i, y_i) devono essere già ridotte a polarità. Per esempio, supponiamo che i rettangoli che contengono (x, y) siano R_1, R_2, R_3 e che abbiano rispettivamente polarità $(-13, 4), (2, 27), (-8, 9)$, e che il piano sia attraversato dal segnale σ di polarità $(31, 200)$. Allora il segnale fuoriuscente da (x, y) avrà polarità $(5, 16)$.

Si richiede di implementare una struttura dati efficiente che permette di eseguire le operazioni seguenti (si tenga presente che la minima porzione rettangolare di piano contenente tutti i filtri può essere molto grande rispetto al numero di filtri presenti, quindi *non è sicuramente efficiente rappresentare il piano mediante una matrice*).

Inizialmente il piano non contiene alcun filtro e il segnale che lo attraversa ha polarità nulla.

- **segnale**(x, y)

Pone la polarità del segnale che attraversa il piano uguale a $(x, y)°$. Si noti che (x, y) è una coppia di interi, ma non necessariamente una polarità.

- **filtro**(a, b, c, d, x, y)

  Introduce il filtro di forma $R(a, b, c, d)$ e polarità $(x, y)°$. Se invece non è possibile inserire $R(a, b, c, d)$ a causa della configurazione attuale del piano, allora stampa il messaggio:
  `(a, b, c, d) non inseribile`.

- **elimina**(a, b, c, d)

  Elimina dal piano ogni filtro di forma $R(a, b, c, d)$. Se non è presente alcun filtro di forma $R(a, b, c, d)$, non viene compiuta alcuna operazione.

- **grado**(a, b, c, d)

  Stampa il grado di annidamento di un filtro di forma $R(a, b, c, d)$. Se non è presente alcun filtro di forma $R(a, b, c, d)$, non viene compiuta alcuna operazione (si noti che il grado non dipende dal numero di filtri di forma $R(a, b, c, d)$ purché ce ne sia almeno uno).

- **gradopiano**()

  Stampa il grado di annidamento del piano.

- **inviluppo**(a, b, c, d, e, f, g, h)

  Se entrambi i rettangoli $R(a, b, c, d)$ e $R(e, f, g, h)$ sono presenti nel piano stampa le coordinate del rettangolo costituente il loro minimo inviluppo. Altrimenti non viene compiuta alcuna operazione.

- **punto**(a, b)

  Stampa la polarità del segnale fuoriuscente dal punto (a, b).

Specifiche di implementazione

Il programma deve leggere dallo standard input (`stdin`) una sequenza di linee (separate da `\n`), ciascuna delle quali corrisponde a una linea della prima colonna della Tabella 1, dove a, b, c, d, e, f, g, h sono numeri naturali, mentre x, y sono interi (eventualmente negativi). I vari elementi sulla linea sono separati da uno o più spazi. Quando una linea è letta viene eseguita l'operazione ad essa associata e viene stampato l'eventuale output prodotto dall'esecuzione dell'operazione associata; tutte le operazioni di stampa sono effettuate sullo standard output (`stdout`) e ogni operazione deve iniziare su una nuova linea.

Note

1. Non devono essere presenti vincoli sulla dimensione del piano e sulla dimensione e numero dei rettangoli presenti nel piano. Non si richiede – anzi si sconsiglia – l'uso di grafica, se non per test personali: in modo particolare, non si usi `conio.h` e neppure `clrscr()`.
2. Per semplicità si suppone che l'input sia sempre conforme alle specifiche di Tabella 1, per cui non è necessario controllare la correttezza dell'input.

Esempio

Si supponga che le linee di input siano:

Linea di input	Operazione
`s` x y	**segnale** (x, y)
`f` a b c d x y	**filtro**(a, b, c, d, x, y)
`e` a b c d	**elimina**(a, b, c, d)
`g` a b c d	**grado**(a, b, c, d)
`G`	**gradopiano**$()$
`i` a b c d e f g h	**inviluppo**(a, b, c, d, e, f, g, h)
`p` a b	**punto**(a, b)
`q`	Termina l'esecuzione del programma

Tabella 1: Specifiche del programma

```
s 3 5
f 2 2 12 10 2 -2
f 2 2 8 8 0 10
f 4 3 7 6 -4 -6
f 10 7 12 10 5 7
i 4 3 7 6 10 7 12 10
p 5 5
f 4 9 10 11 1 1
f 4 3 7 6 11 17
G
g 2 2 12 10
p 5 5
e 4 3 7 6
p 5 5
f 12 9 15 12 7 5
i 12 9 15 12 10 7 12 10
e 2 2 12 10
i 12 9 15 12 10 7 12 10
G
q
```

L'output prodotto dal programma deve essere:

```
(2, 2, 12, 10)
1 0
(4, 9, 10, 11) non inseribile
3
2
9 17
```

```
4 3
(2, 2, 15, 12)
(10, 7, 15, 12)
1
```

Presentazione del progetto

Il progetto deve essere inviato per posta elettronica all'indirizzo `aguzzoli@dsi.unimi.it` entro il 23 Aprile 2004. La discussione del progetto e l'esame orale si svolgeranno in data e luogo da specificarsi.

Occorre presentare:

1. il codice sorgente (rigorosamente ANSI C, compilabile con **gcc**);
2. una sintetica relazione (formato pdf o rtf) che illustra le strutture dati utilizzate e analizza il costo delle diverse operazioni richieste dalla specifica.

I due o più file (file sorgenti C + relazione) devono essere contenuti in un unico file `.zip` il cui nome dovrà essere `cognome.zip`. La relazione e il codice devono riportare il vostro nome, cognome e matricola.

Una copia cartacea della relazione e del codice deve inoltre essere consegnata al dr. Aguzzoli sempre entro il 23 Aprile 2004 (lasciandola eventualmente nella sua casella postale presso il dipartimento in via Comelico).

Si ricorda infine di presentarsi alla prova orale con una copia stampata della relazione e del codice.

Per ogni ulteriore chiarimento:
E-mail: `aguzzoli@dsi.unimi.it`
Ricevimento: il mercoledì, ore 15-16, stanza S204.

Avvisi

La versione aggiornata del progetto è pubblicata in .pdf sul sito:
`http://homes.dsi.unimi.it/∼aguzzoli/algo.htm`.
Si consiglia di consultare periodicamente questo sito per eventuali correzioni e/o precisazioni relative al testo del progetto.

Si richiede allo studente di effettuare un adeguato collaudo del proprio progetto su numerosi esempi diversi per verificarne la correttezza e valutarne le prestazioni.

Lo svolgimento del progetto è una prova d'esame da svolgere **individualmente**. I progetti giudicati frutto di **collaborazioni** saranno **estromessi** d'ufficio dalla valutazione.