Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Docenti: M. Goldwurm, S. Aguzzoli

Appello del 1° Luglio 2005

Progetto "Oleodotti 2"
Consegna entro il 17 Luglio 2005

Il problema

In un piano sono presenti dei pozzi che attingono olio da giacimenti petroliferi. L'obiettivo è di creare collegamenti ottimali fra pozzi del piano tramite oleodotti.

Formalmente, chiamiamo *piano* l'insieme dei punti

$$\{\ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \}.$$

Chiamiamo punto *intero* un punto (x,y) del piano tale che sia x che y sono interi ($(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

Dati due punti interi $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ e $D \in \{N,E,S,W\}$, diciamo che P_2 si trova in direzione D rispetto a P_1 se e solo se:

- $D = N$ e $y_2 > y_1$;
- $D = E$ e $x_2 > x_1$;
- $D = S$ e $y_2 < y_1$;
- $D = W$ e $x_2 < x_1$.

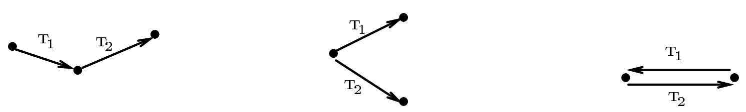
Dati x_0,y_0,x_1,y_1 interi, denotiamo con $R(x_0,y_0,x_1,y_1)$ il rettangolo

$$R(x_0,y_0,x_1,y_1) \ = \ \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ | \ x_0 \le x \le x_1,\ y_0 \le y \le y_1\}.$$

Un pozzo petrolifero è caratterizzato dalla sua collocazione nel piano e dal suo valore. Più precisamente, $P(x,y,v)$, dove (x,y) è un punto intero e v è un intero positivo, denota il pozzo collocato nel punto (x,y) e avente valore v (poniamo $Val(P) = v$).

Nel piano sono presenti delle *zone difficoltose* (laghi, catene mountuose, etc...) che influiscono negativamente sul valore di un oleodotto che le attraversi. Con $Z(x_0,y_0,x_1,y_1,l)$, dove l è un intero positivo, indichiamo che $R(x_0,y_0,x_1,y_1)$ definisce una zona difficoltosa di livello l (poniamo $Val(Z) = l$). Assumiamo che tutte le zone difficoltose siano a due a due disgiunte.

Dati due punti interi del piano P_1 e P_2, un *tubo* da P_1 a P_2, denotato con $[P_1,P_2]$, è il segmento orientato avente come estremi P_1 e P_2 (che è un sottoinsieme di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$); si noti che $[P_1,P_2]$ e $[P_2,P_1]$ denotano tubi distinti. Un punto $P \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ appartiene a $[P_1,P_2]$ se e solo se P è un punto di tale segmento. Due tubi T_1 e T_2 possono intersecarsi se e solo se un estremo di T_1 coincide con un estremo di T_2. Ad esempio, sono ammesse le intersezioni di questo tipo



mentre sono vietate quelle di questo tipo

La posa di un nuovo tubo nel piano richiede un costo che dipende dalla lunghezza del tubo stesso. Più dettagliatamente, sia c il costo *unitario* attuale di un tubo, dove c è un intero positivo. Il *costo* $C(T)$ di posa del tubo T di estremi (x_1, y_1),(x_2, y_2) è:

$$C(T) \; = \; c \cdot (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)\,.$$

Dati due punti interi A e B del piano e $D \in \{N, E, S, W\}$, un *oleodotto* O *in direzione* D da A a B è una successione di tubi $[P_1, P_2], [P_2, P_3], \ldots, [P_{n-1}, P_n]$ tali che:

1. P_1 coincide con A e P_n coincide con B.
2. Per ogni $j = 2, \ldots, n-1$, P_j è la posizione di un pozzo.
3. Per ogni $j = 2, \ldots, n$, il punto P_j si trova in direzione D rispetto a P_{j-1}.

È possibile che un tubo appartenga a più di un oleodotto.
Diciamo che l'oleodotto $O = [P_1, P_2], [P_2, P_3], \ldots, [P_{n-1}, P_n]$ *utilizza* il pozzo P se P è l'estremo di un tubo di O; O *attraversa* una zona difficoltosa Z se un punto di Z appartiene a un tubo di O. Dato un oleodotto O, sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei pozzi utilizzati da O, sia $\mathcal{Z}$ l'insieme delle zone difficoltose attraversate da O e sia $\mathcal{T}$ l'insieme dei tubi posati per costruire l'oleodotto ($\mathcal{T}$ non contiene gli eventuali tubi dell'oleodotto che erano già presenti nel piano prima della costruzione dell'oleodotto stesso). Il *valore* $Val(O)$ di O è:

$$Val(O) \; = \; \sum_{P\,:\,P \in \mathcal{P}} Val(P) - \sum_{Z\,:\,Z \in \mathcal{Z}} Val(Z) - \sum_{T\,:\,T \in \mathcal{T}} C(T)\,.$$

La *costruzione* di un oleodotto O è richiesta specificando

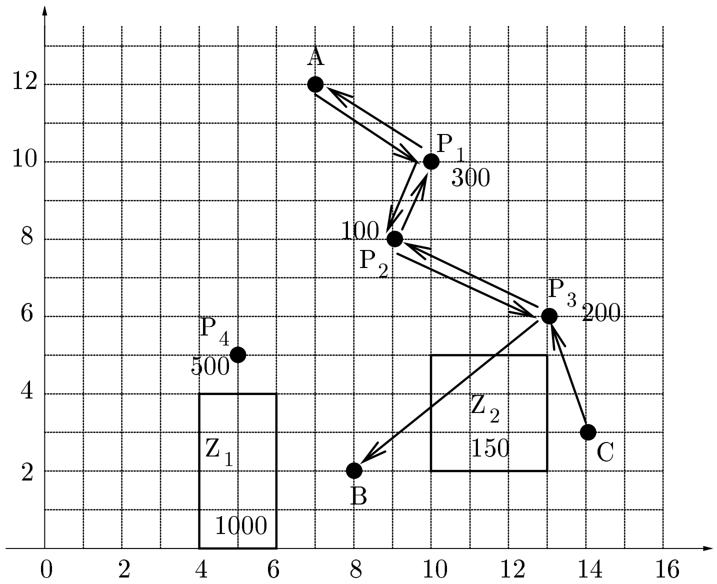
- il punto di partenza A;
- il punto di arrivo B;
- la direzione D.

Non sempre è possibile soddisfare tutte le richieste di costruzione di oleodotti poiché, in certi casi, tutte le possibili successioni di tubi connettenti A a B in direzione D vanno a intersecare in modo non consentito tubi di oleodotti già presenti. Quando esistono oleodotti rispettanti le specifiche richieste, allora si dovrà costruire un oleodotto di valore massimo tra tutti i possibili oleodotti.

Esempio
Si supponga che nel piano siano presenti quattro pozzi $P_1, \ldots, P_4$ e due zone difficoltose Z_1, Z_2 tali che

$$P_1 \; = \; P(10, 10, 300) \qquad P_2 \; = \; P(9, 8, 100) \qquad P_3 \; = \; P(13, 6, 200) \qquad P_4 \; = \; P(5, 5, 500)$$
$$Z_1 \; = \; Z(4, 0, 6, 4, 1000) \qquad Z_2 \; = \; Z(10, 2, 13, 5, 150)$$

e che il costo unitario di posa di un tubo sia 1.



Si supponga di voler costruire un oleodotto O_1 dal punto $A = (7, 12)$ al punto $B = (8, 2)$ in direzione S. L'oleodotto ottimale è:

$$O_1 \ = \ [A, P_1],\ [P_1, P_2],\ [P_2, P_3],\ [P_3, B]$$

il cui valore è 427 (i costi di posa dei tubi sono rispettivamente 5, 3, 6 e 9). Osserviamo che non è conveniente sostituire il tubo $[P_3, B]$ con i tubi $[P_3, P_4]$ e $[P_4, B]$, i cui costi sono rispettivamente 9 e 6. Infatti, in tal caso l'oleodotto utilizzerebbe il pozzo P_4 di valore 500, ma attraverserebbe la zona difficoltosa Z_1 di valore 1000 (il punto $(6, 4)$ di Z_1 appartiene a $[P_4, B]$), quindi il valore dell'oleodotto sarebbe 71, che è minore del valore di O_1. Non è invece possibile costruire alcun oleodotto da A a B in direzione E (i pozzi a E di A sono anche a E di B, quindi non possono essere utilizzati), e ovviamente neppure in direzione N e W.

Supponiamo ora di voler costruire un oleodotto O_2 dal punto $C = (14, 3)$ al punto A in direzione N. Notiamo che non è possibile collegare C e P_4 con un tubo, poiché esso intersecherebbe $[P_3, B]$. La soluzione è:

$$O_2 \ = \ [C, P_3],\ [P_3, P_2],\ [P_2, P_1],\ [P_1, A]$$

di valore 582 (si noti che nessun tubo di O_1 è utilizzabile, quindi tutti i tubi vanno posati). Se non fosse presente il tubo $[P_3, B]$, la soluzione ottimale sarebbe quella di posare i tubi $[C, P_4]$ (costo 11), $[P_4, P_3]$ (costo 9), $[P_3, P_2]$ (costo 6), $[P_2, P_1]$ (costo 3) e $[P_1, A]$ (costo 5), ottenendo come valore 916. Infine, l'oleodotto ottimale O_3 da C a P_4 in direzione W (non rappresentato nella figura) è:

$$O_3 \ = \ [C, P_3],\ [P_3, P_1],\ [P_1, P_2],\ [P_2, P_4]$$

di valore 1086 (i tubi che devono essere posati sono $[P_3, P_1]$ di costo 7 e $[P_2, P_4]$ di costo 7).

Si richiede di implementare una struttura dati efficiente che permetta di eseguire le operazioni seguenti (si tenga presente che la minima porzione rettangolare di piano contenente tutti i pozzi e le zone difficoltose può essere molto grande rispetto al numero di pozzi e zone difficoltose presenti nel piano, quindi *non è sicuramente efficiente rappresentare il piano mediante una matrice*).

- **crea** (c)

  Crea un piano vuoto eliminando l'eventuale piano già esistente e i pozzi, le zone difficoltose e gli oleodotti in esso presenti. Stabilisce che il costo unitario è c.

- **unitario** (c)

  Pone a c il valore del costo unitario.

- **pozzo** (x, y, v)

  Se nel punto (x, y) non è presente alcun pozzo, allora colloca in (x, y) un pozzo di valore v; se invece nel punto (x, y) è già presente un pozzo gli assegna il valore v.

- **zona** (x_0, y_0, x_1, y_1, v)

  Se il rettangolo $R(x_0, y_0, x_1, y_1)$ non interseca alcun rettangolo presente nel piano, allora inserisce nel piano la zona difficoltosa $Z(x_0, y_0, x_1, y_1, v)$, altrimenti stampa il messaggio: `Impossibile inserire la zona difficoltosa` $Z(x_0, y_0, x_1, y_1, v)$.

- **oleodotto** (x_0, y_0, x_1, y_1, D)

  Richiede la costruzione di un oleodotto O di valore massimo fra tutti gli oleodotti possibili tra i punti $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ in direzione D. Se un tale oleodotto O esiste, allora ne stampa il valore $Val(O)$ e la successione di tubi che lo costituiscono, secondo il formato specificato nell'apposita sezione, altrimenti stampa il messaggio: `Impossibile costruire l'oleodotto` $o(x_0, y_0, x_1, y_1, D)$.

- **chiudi** (x, y)

  Chiude ed elimina il pozzo in posizione (x, y), eliminando dal piano ogni tubo di cui (x, y) è un estremo. Se (x, y) non è la posizione di alcun pozzo, allora non fa nulla.

Specifiche di implementazione

Il programma deve leggere dallo standard input (`stdin`) una sequenza di linee (separate da `\n`), ciascuna delle quali corrisponde a una linea della prima colonna della Tabella 1, dove x_0, y_0, x_1, y_1 sono numeri interi, v è un intero positivo e $D \in \{N, E, S, W\}$.

I vari elementi sulla linea sono separati da uno o più spazi. Quando una linea è letta, viene eseguita l'operazione associata; le operazioni di stampa sono effettuate sullo standard output (`stdout`), e ogni operazione deve iniziare su una nuova linea.

Linea di input	Operazione
`c` v	**crea** (v)
`u` v	**unitario** (v)
`p` x_0 y_0 v	**pozzo** (x_0, y_0, v)
`z` x_0 y_0 x_1 y_1 v	**zona** (x_0, y_0, x_1, y_1, v)
`o` x_0 y_0 x_1 y_1 D	**oleodotto** (x_0, y_0, x_1, y_1, D)
`h` x_1 y_1	**chiudi** (x_1, y_1)
`f`	Termina l'esecuzione del programma

Tabella 1: Specifiche del programma

Note

1. Non devono essere presenti vincoli sulla dimensione del piano, sul numero di tubi di un oleodotto, sul numero di pozzi e zone difficoltose presenti nel piano (se non quelli determinati dal tipo di dato intero). Non si richiede – anzi si sconsiglia – l'uso di grafica, se non per test personali: in modo particolare, non si usi `conio.h` e neppure `clrscr()`.

2. Per semplicità si suppone che l'input sia sempre conforme alle specifiche di Tabella 1, per cui non è necessario controllare la correttezza dell'input. Per leggere l'input si usino le funzioni standard ANSI C `getchar()` e/o `scanf()`.

3. Sia $O = [(x_1, y_1), (x_2, y_2)][(x_2, y_2), (x_3, y_3)], \ldots, [(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)]$ un oleodotto di valore massimo $v = Val(O)$, tra i punti $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_n, y_n)$, in direzione D. Allora l'output del comando
   `o` $x_1 \quad y_1 \quad x_n \quad y_n \quad D$
   deve essere visualizzato nel seguente formato:

   $(v$
   x_1, y_1
   x_2, y_2
   $\vdots$
   x_n, y_n
   $)$

Esempio

Si supponga che le linee di input siano:

```
c 1
p -8 2 50
p 16 4 20
p 6 12 100
p 14 8 300
p -4 -4 700
p -2 8 40
p 6 2 100
p -4 10 200
z -2 3 3 6 2000
z 8 3 13 6 1000
z -4 -3 0 0 3000
o 6 12 6 2 S
o 14 12 -8 2 S
o 6 12 10 -2 S
o -8 2 14 8 E
o 6 12 -2 -6 S
o -8 2 6 12 N
o 6 2 6 12 N
u 20
o 6 0 6 12 N
h 6 2
p 6 4 200
o 6 0 6 12 N
```

```
f
```

L'output prodotto dal programma deve essere:

```
(190
6,12
6,2
)
Impossibile costruire l'oleodotto o(14,12,-8,2,S)
(390
6,12
14,8
16,4
10,-2
)
(662
-8,2
-4,10
-2,8
6,12
14,8
)
(1052
6,12
-4,10
-2,8
-8,2
-4,-4
-2,-6
)
(362
-8,2
-2,8
-4,10
6,12
)
(190
6,2
6,12
)
(160
6,0
6,2
6,12
)
(70
6,0
-8,2
-2,8
-4,10
```

```
6,12
)
```

Presentazione del progetto

Il progetto deve essere inviato per posta elettronica all'indirizzo `aguzzoli@dsi.unimi.it` entro il 17 Luglio 2005 (incluso). La discussione del progetto e l'esame orale si svolgeranno in data e luogo da specificarsi (consultare al riguardo il sito: `http://homes.dsi.unimi.it/~goldwurm/algo`).

Occorre presentare:

1. il codice sorgente (rigorosamente ANSI C, compilabile con **gcc**);
2. una sintetica relazione (formato pdf o rtf) che illustra le strutture dati utilizzate e analizza il costo delle diverse operazioni richieste dalla specifica.

I due o più file (file sorgenti C + relazione) devono essere contenuti in un unico file `.zip` il cui nome dovrà essere `cognome.zip`. La relazione e il codice devono riportare il vostro nome, cognome e matricola.

Una copia cartacea della relazione e del codice deve inoltre essere consegnata al dr. Aguzzoli sempre entro il 17 Luglio 2005 (lasciandola eventualmente nella sua casella postale presso il dipartimento in via Comelico).

Si ricorda infine di presentarsi alla prova orale con una copia stampata della relazione e del codice.

Per ogni ulteriore chiarimento:
E-mail: `aguzzoli@dsi.unimi.it`
Ricevimento: il mercoledì, ore 15-16, stanza S204.

Avvisi

La versione aggiornata del progetto è pubblicata in .pdf sul sito:
`http://homes.dsi.unimi.it/~aguzzoli/algo.htm`.
Si consiglia di consultare periodicamente questo sito per eventuali correzioni e/o precisazioni relative al testo del progetto.

Si richiede allo studente di effettuare un adeguato collaudo del proprio progetto su numerosi esempi diversi per verificarne la correttezza e valutarne le prestazioni.

La realizzazione del progetto è una prova d'esame da svolgersi **individualmente**. I progetti giudicati frutto di **collaborazioni** saranno **estromessi** d'ufficio dalla valutazione.