

Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Esercitazioni del'11 Dicembre 2012

Esercizio 3: mosse sulla scacchiera

È un esercizio sulle tecniche di programmazione dinamica.

Ogni casella (i, j) di una scacchiera rettangolare di r righe e c colonne contiene un numero intero (uno `short`) $p(i, j)$, che rappresenta il *prezzo* della casella stessa.

Un *percorso* sulla scacchiera è una sequenza di $r + c - 1$ caselle

$$(i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_{r+c-2}, j_{r+c-2})$$

tale che:

- $(i_1, j_1) = (0, 0)$;
- $(i_{r+c-2}, j_{r+c-2}) = (r - 1, c - 1)$;
- Per ogni $0 < k < r + c - 1$ vale che:
 - o $(i_k, j_k) = (i_{k-1} - 1, j_k)$,
 - oppure $(i_k, j_k) = (i_k, j_{k-1} - 1)$.

In altre parole un percorso è una sequenza di caselle che inizia dalla casella in alto a sinistra, finisce nella casella in basso a destra, e ogni due caselle consecutive condividono un lato, orizzontale o verticale.

Il *prezzo* di una sequenza è la somma dei prezzi delle caselle che la compongono.

Lo scopo del gioco è determinare una sequenza di prezzo minimo fra tutte le sequenze possibili.

Si richiede di implementare un programma che:

1. Sia posto in esecuzione con il comando `scacchiera <nomefile>` dove `<nomefile>` è il nome di un file avente il seguente formato:

```
r c
p(0,0) p(0,1) ... p(0,c-1)
p(1,0) p(1,1) ... p(1,c-1)
...
p(r-1,0) p(r-1,1) ... p(r-1,c-1)
```

2. Legga dal file `nomefile` il contenuto della scacchiera di r righe e c colonne, la cui casella di posto (i, j) ha prezzo $p(i, j)$.
3. Calcoli e stampi un percorso di prezzo minimo nel formato riportato nell'esempio seguente.

Esempio: Sia `scacchiera.txt` il seguente file:

```
3 5
2 5 7 9 1
4 3 5 5 3
6 2 8 4 3
```

Allora l'output prodotto dal comando `scacchiera scacchiera.txt` deve essere il seguente:

```
[ 2]
[ 4] [ 3] [ 5] [ 5] [ 3]
      [ 3]
```

Costo del percorso: 25

Suggerimenti per l'implementazione

Usando la programmazione dinamica si può risolvere il problema in tempo (e spazio) $O(rc)$.

- Per il calcolo del percorso ci si dota di due array.
 1. Una tabella A di $r * c$ elementi `short`.
 2. Un vettore B di $r + c - 2$ bits (si usi `char`).
- La posizione (i, j) della tabella A conterrà il prezzo di un percorso di prezzo minimo per la sottoscacchiera costituita dalle prime i righe e j colonne. Tale valore si calcola prendendo in considerazione i valori di A in $(i - 1, j)$ e $(i, j - 1)$ (nota che uno o entrambi di questi valori potrebbero non esistere), prendendo il minimo fra i due valori e sommandolo a $p(i, j)$.
- Ovviamente $A(0, 0) = p(0, 0)$, e gli altri valori si calcolano come descritto al punto precedente. Dopo $O(rc)$ passi, tutti i valori della tabella A saranno stati calcolati.
- In $A(r - 1, c - 1)$ troviamo il valore di un percorso minimo. A questo punto non ci resta che costruirlo.
- La i -esima posizione del vettore B conterrà un bit che specificherà se la $(i + 1)$ casella del percorso di prezzo minimo giace sotto (valore del bit: 1) oppure a destra (valore del bit: 0) della casella i -esima. Il vettore B viene costruito a ritroso a partire dall'ultima posizione. In particolare sia (i, j) la k -esima casella del percorso. Se la differenza tra $A(i, j)$ e $A(i - 1, j)$ è uguale a $p(i, j)$ allora la $k - 1$ -esima casella del percorso giace sopra la k -esima, altrimenti giace a sinistra. Dopo $O(r + c - 2)$ passi, tutti i valori di B saranno stati calcolati.
- Una volta che il vettore B è stato calcolato, possiamo scandirlo dall'indice 0 all'indice $r + c - 3$ per determinare la sequenza di caselle che costituiscono il percorso di prezzo minimo.