Mars Express

Mars Express: missione spaziale della European Space Agency (ESA).

Durata: 2003-2014.

Obiettivo: esplorazione della superficie di Marte tramite sonda orbitante intorno al pianeta.

Il problema

Le comunicazioni tra Terra e Marte devono essere programmate durante finestre temporali di visibilità, cioè intervalli di tempo durante i quali:

- i comandi possono essere trasmessi dalla Terra a Marte;
- i dati possono essere trasmessi da Marte alla Terra.

I dati acquisiti dagli strumenti vengono temporaneamente memorizzati in banchi di memoria a bordo della sonda orbitante:

- capacità nota;
- memorie circolari: quando si saturano, gli ultimi dati sovrascrivono i primi.

. Durante una finestra di visibilità si possono trasmettere a Terra dati

- in quantità limitata (capacità nota);
- solo già in memoria quando la finestra temporale ha inizio.

. La dimensione dei dati non è sempre nota con certezza: serve un piano di comunicazione robusto.

Modello semplificato (1): dati

Una prima versione di base del modello del problema è la seguente.

Dati:

- un insieme $\mathcal{M} = 1, \ldots, M$ di *banchi di memoria* con capacità c_m $\forall m \in \mathcal{M}$;
- un insieme $\mathcal{P} = 1, \ldots, P$ di periodi, ciascuno formato da una finestra di visibilità e da un successivo intervallo di tempo fino all'inizio della finestra di visibilità successiva;
- una capacità b_p (cioè una quantità di dati scaricabili) per ogni finestra di visibilità $p \in \mathcal{P}$;
- una quantità prevista d_{mp} di nuovi dati in arrivo in ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ in ogni periodo $p \in \mathcal{P}$;
- una quantità di dati f_m inizialmente presente in ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$.

Modello semplificato (2): variabili

Variabili:

- x_{mp}: quantità di dati trasmessi a Terra da ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ durante ogni periodo $p \in \mathcal{P}$;
- y_{mp}: quantità totale di dati residui in ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ alla fine di ogni periodo $p \in \mathcal{P}$;
- z_{mp}: quantità di dati in ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ trasmissibili ma non trasmessi in ogni periodo $p \in \mathcal{P}$.

Le variabili sono tutte non-negative.

Le variabili sono continue o discrete?

Modello semplificato (2): variabili

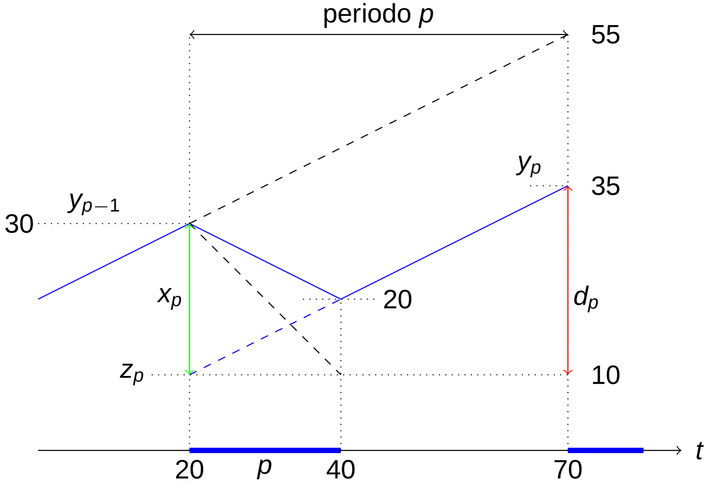
Variabili:

- x_{mp}: quantità di dati trasmessi a Terra da ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ durante ogni periodo $p \in \mathcal{P}$;
- y_{mp}: quantità totale di dati residui in ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ alla fine di ogni periodo $p \in \mathcal{P}$;
- z_{mp}: quantità di dati in ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ trasmissibili ma non trasmessi in ogni periodo $p \in \mathcal{P}$.

Le variabili sono tutte non-negative.

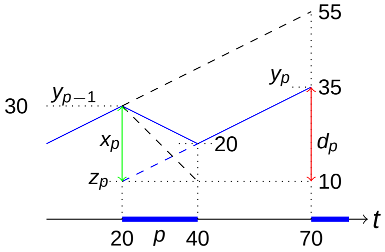
Le variabili sono discrete ma le quantità in gioco sono molto grandi (Megabit) rispetto alla loro unità di misura indivisibile (bit). Quindi è lecito arrotondare eventuali soluzioni frazionarie, poiché questo introduce un'approssimazione trascurabile.

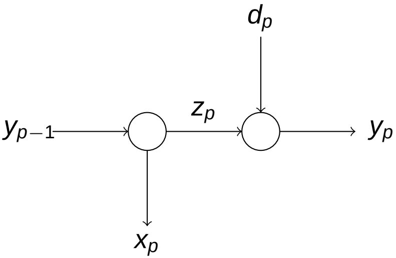
Rappresentazione grafica



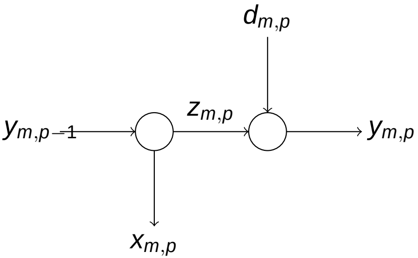
Modello semplificato (3): vincoli di flusso

Le variabili x, y e z non sono indipendenti tra loro, perché i dati non si creano e non si distruggono: è un problema di flusso su grafo.



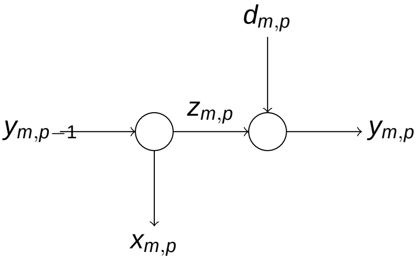


Modello semplificato (3): vincoli di flusso



Il flusso si deve conservare: come scriviamo i vincoli di conservazione del flusso?

Modello semplificato (3): vincoli di flusso



Vincoli di conservazione del flusso:

$$y_{m,p-1} = x_{m,p} + z_{m,p} \quad \forall m = 1, \ldots, M, \ \forall p = 2, \ldots, P$$

$$z_{m,p} + d_{m,p} = y_{m,p} \quad \forall m = 1, \ldots, M, \ \forall p = 1, \ldots, P.$$

C'è una condizione iniziale (per $p = 1$):

$$f_m = x_{m,1} + z_{m,1} \quad \forall m = 1, \ldots, M.$$

Modello semplificato (3): vincoli

Vincolo sulla minima e massima quantità di dati in ogni banco di memoria:
i banchi di memoria non devono saturarsi (*overwriting*)

e non possono fornire più dati di quelli che contengono (*overdumping*).

Come scriviamo questi vincoli in linguaggio matematico?

Modello semplificato (3): vincoli

Vincolo sulla minima e massima quantità di dati in ogni banco di memoria:
i banchi di memoria non devono saturarsi (*overwriting*)

$$y_{mp} \leq c_m \quad \forall m \in \mathcal{M}, \ \forall p \in \mathcal{P}.$$

e non possono fornire più dati di quelli che contengono (*overdumping*).

$$z_{mp} \geq 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}, \ \forall p \in \mathcal{P}.$$

Modello semplificato (3): vincoli

Vincolo sulle quantità di dati che si possono trasmettere in ogni finestra temporale: in ogni finestra temporale non si possono trasmettere complessivamente più dati della sua capacità.

Come scriviamo questo vincolo in linguaggio matematico?

Modello semplificato (3): vincoli

Vincolo sulle quantità di dati che si possono trasmettere in ogni finestra temporale: in ogni finestra temporale non si possono trasmettere complessivamente più dati della sua capacità.

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} x_{mp} \leq b_p \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Modello semplificato (4): obiettivo

Obiettivo: L'obiettivo principale è la robustezza del piano rispetto a possibili variazioni impreviste dei dati d.

La robustezza viene valutata in base alla saturazione dei banchi di memoria, cioè alla frazione di capacità occupata.

Un piano è robusto se la saturazione in tutti i banchi di memoria in tutti i momenti è mantenuta bassa. Si vuole quindi minimizzare la massima saturazione.

Come rappresentiamo questo obiettivo in linguaggio matematico?

Modello semplificato (4): obiettivo

Obiettivo: L'obiettivo principale è la robustezza del piano rispetto a possibili variazioni impreviste dei dati d.

La robustezza viene valutata in base alla saturazione dei banchi di memoria, cioè alla frazione di capacità occupata.

Un piano è robusto se la saturazione in tutti i banchi di memoria in tutti i momenti è mantenuta bassa. Si vuole quindi minimizzare la massima saturazione.

Per rappresentare questo obiettivo, introduciamo una variabile ausiliaria α da minimizzare e imponiamo

$$y_{mp} \leq \alpha \, c_m \quad \forall m \in \mathcal{M}, \; \forall p \in \mathcal{P}.$$

Modello semplificato completo

Modello matematico del problema di ottimizzazione.

$$
\begin{aligned}
\min\ & \alpha \\
\text{s.t. } & y_{m\ p-1} = x_{mp} + z_{mp} && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P}, p > 1 \\
& f_m = x_{m1} + z_{m1} && \forall m \in \mathcal{M} \\
& z_{mp} + d_{mp} = y_{mp} && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P} \\
& y_{mp} \leq \alpha\, c_m && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P} \\
& \sum_{m \in \mathcal{M}} x_{mp} \leq b_p && \forall p \in \mathcal{P} \\
& x_{mp} \geq 0 && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P} \\
& z_{mp} \geq 0 && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P}.
\end{aligned}
$$

Classificazione. Che tipo di modello è?

Modello semplificato completo

Modello matematico del problema di ottimizzazione.

$$
\begin{aligned}
\min\ & \alpha \\
\text{s.t. } & y_{m\ p-1} = x_{mp} + z_{mp} && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P}, p > 1 \\
& f_m = x_{m1} + z_{m1} && \forall m \in \mathcal{M} \\
& z_{mp} + d_{mp} = y_{mp} && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P} \\
& y_{mp} \leq \alpha\, c_m && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P} \\
& \sum_{m \in \mathcal{M}} x_{mp} \leq b_p && \forall p \in \mathcal{P} \\
& x_{mp} \geq 0 && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P} \\
& z_{mp} \geq 0 && \forall m \in \mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{P}.
\end{aligned}
$$

Classificazione. É un modello di programmazione lineare:

- variabili continue;
- vincoli lineari, obiettivo lineare.

Calcolo della soluzione ottima

Algoritmi per calcolare la soluzione ottima esistono già (l'algoritmo del simplesso, per esempio).

Non è neppure da considerare l'idea di eseguirli a mano.

Esistono già anche i solutori software che eseguono quegli algoritmi.

Saperli usare è un'abilità di tipo tecnico.

Il vero valore didattico e formativo sta nel formulare correttamente il modello matematico del problema.

Il modello completo

Perdita di dati. Quando la perdita di dati è inevitabile, vorremmo minimizzare il valore di quelli persi.

Modifichiamo i vincoli di conservazione del flusso: come?

Il modello completo

Perdita di dati. Quando la perdita di dati è inevitabile, vorremmo minimizzare il valore di quelli persi.

Modifichiamo i vincoli di conservazione del flusso:

$$y_{mp} + v_{mp} = z_{mp} + d_{mp} \quad \forall m \in \mathcal{M} \;\; \forall p \in \mathcal{P}$$

dove $v_{mp} \geq 0$ rappresenta la quantità di dati persi nel banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ alla fine del periodo $p \in \mathcal{P}$.

Associamo un dato valore unitario π_i ai dati di ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$.

L'obiettivo è...??

Il modello completo

Perdita di dati. Quando la perdita di dati è inevitabile, vorremmo minimizzare il valore di quelli persi.

Modifichiamo i vincoli di conservazione del flusso:

$$y_{mp} + v_{mp} = z_{mp} + d_{mp} \quad \forall m \in \mathcal{M} \;\; \forall p \in \mathcal{P}$$

dove $v_{mp} \geq 0$ rappresenta la quantità di dati persi nel banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ alla fine del periodo $p \in \mathcal{P}$.

Associamo un dato valore unitario π_i ai dati di ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$.

L'obiettivo è:

$$\min \quad \beta = \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \pi_m v_{mp}.$$

Il modello completo

Dati residui. I managers della missione Mars Express vogliono che al termine dell’orizzonte temporale restino in memoria meno dati possibile.

Definiamo quindi un altro obiettivo da ottimizzare: quale?

Il modello completo

Dati residui. I managers della missione Mars Express vogliono che al termine dell'orizzonte temporale restino in memoria meno dati possibile.

Definiamo quindi un altro obiettivo da ottimizzare:

$$\min \quad \gamma = \sum_{m \in \mathcal{M}} y_{mP}.$$

Il modello completo

Numero di trasmissioni Si vuole minimizzare il numero complessivo di operazioni di trasmissione.

Come possiamo fare?

Il modello completo

Numero di trasmissioni Si vuole minimizzare il numero complessivo di operazioni di trasmissione.

Introduciamo variabili binarie w_{mp} per ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ e per ogni finestra temporale $p \in \mathcal{P}$. Il contenuto del banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ viene (parzialmente) trasmesso durante la finestra temporale $p \in \mathcal{P}$ solo se $w_{mp} = 1$.

Per imporre questo, introduciamo ulteriori vincoli: quali?

Il modello completo

Numero di trasmissioni Si vuole minimizzare il numero complessivo di operazioni di trasmissione.

Introduciamo variabili binarie w_{mp} per ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ e per ogni finestra temporale $p \in \mathcal{P}$. Il contenuto del banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ viene (parzialmente) trasmesso durante la finestra temporale $p \in \mathcal{P}$ solo se $w_{mp} = 1$.

Per imporre questo, introduciamo ulteriori vincoli:

$$x_{mp} \leq c_m \, w_{mp} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall p \in \mathcal{P}.$$

Infine ottimizziamo l'obiettivo...??

Il modello completo

Numero di trasmissioni Si vuole minimizzare il numero complessivo di operazioni di trasmissione.

Introduciamo variabili binarie w_{mp} per ogni banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ e per ogni finestra temporale $p \in \mathcal{P}$. Il contenuto del banco di memoria $m \in \mathcal{M}$ viene (parzialmente) trasmesso durante la finestra temporale $p \in \mathcal{P}$ solo se $w_{mp} = 1$.

Per imporre questo, introduciamo ulteriori vincoli:

$$x_{mp} \leq c_m \, w_{mp} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall p \in \mathcal{P}.$$

Infine ottimizziamo l'obiettivo

$$\min \quad \delta = \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{p \in \mathcal{P}} w_{mp}.$$

Ottimizzazione gerarchica e PMO

Abbiamo così definito quattro diverse funzioni obiettivo: α, β, γ e δ.

Come possiamo ottimizzarle tutte?

Usiamo un ordine gerarchico, quando non tutte hanno la stessa importanza.

Usiamo la programmazione a molti obiettivi (PMO) quando hanno la stessa importanza.

Ottimizzazione gerarchica

A giudizio dei responsabili della missione Mars Express il criterio più importante è β (valore dei dati persi).

Il secondo obiettivo più importante è γ (quantità di dati a bordo alla fine del periodo pianificato).

Per ultimi vengono gli obiettivi α (saturazione massima) e δ (numero di trasmissioni), che hanno la stessa importanza.

Ottimizzazione gerarchica

Ottimizzare diverse funzioni obiettivo secondo un ordine gerarchico significa:

- ottimizzare la prima, cioè β: sia β^* il valore ottimo (minimo valore dei dati persi);
- inserire nel modello il vincolo $\beta \leq \beta^*$;
- ottimizzare la seconda, cioè γ: sia γ^* il valore ottimo (minima quantità dati residua);
- inserire nel modello il vincolo $\gamma \leq \gamma^*$;
- ecc...

Programmazione a molti obiettivi

Infine, le ultime due funzioni obiettivo α e δ vengono minimizzate con la programmazione a molti obiettivi.

Non esiste una soluzione ottima, ma si cerca l'insieme delle soluzioni non-dominate o Paretiane.

Una soluzione A è dominata da una soluzione B quando

- $\alpha(A) \geq \alpha(B)$
- $\delta(A) \geq \delta(B)$

e almeno una delle due disuguaglianze è stretta.

L'insieme delle soluzioni non-dominate è la regione Pareto-ottima.

Programmazione a molti obiettivi

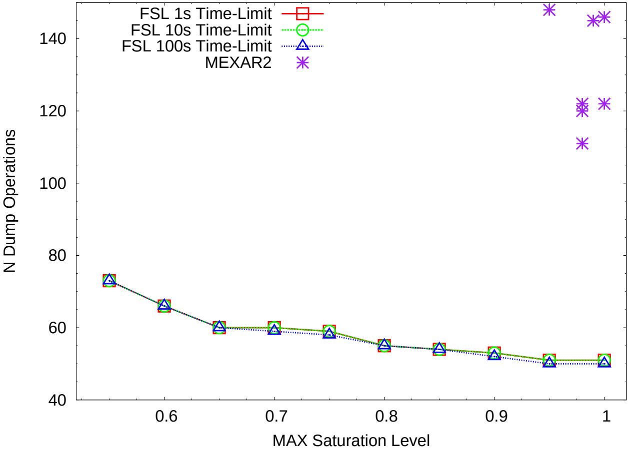


Figura: Regione Pareto-ottima (I88-98). Le soluzioni ottenute con MEXAR2 (“intelligenza artificiale”) sono indicate da asterischi.