

Modelli matematici e didattica della matematica

Giovanni Righini

12 Gennaio 2024



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO



I Lincei per la Scuola
Fondazione

La matematica computazionale

Il XX secolo ha segnato una svolta (anche) in matematica: è nata la **matematica computazionale**.

Da disciplina che studia “come **fare** i calcoli”
a disciplina che studia “come **far fare** i calcoli” (al calcolatore).

Da disciplina che **studia proprietà, enunciando teoremi**,
a disciplina che **studia come risolvere (algoritmicamente) problemi**.

Nascono nuovi criteri: **complessità, efficienza, . . .**

Questo cambio di paradigma dovrebbe riflettersi anche
nell'insegnamento scolastico della matematica.

Proposta n.1

Le **difficoltà di apprendimento in matematica** sono spesso dovute alla (o accentuate dalla) **mancanza di motivazione**.

Punto di vista neo-platonico: esistono delle verità matematiche. I matematici le **scoprono**, sospinti dalla loro curiosità intellettuale.

Punto di vista ingegneristico: esistono dei problemi da risolvere. I matematici **inventano** strumenti utili, sospinti dalla necessità.

Proposta n.1. *Passare dal metodo assiomatico al rispetto della realtà storica: dalle **applicazioni** allo sviluppo della **teoria**. Presentare i **concetti matematici** come **soluzioni di problemi (rilevanti)** altrimenti **insolubili**.*

Assumere un punto di vista meno assiomatico e più aderente alla realtà storica non significa

- insegnare meno **concetti matematici** (anzi, di più);
- sostituire le **conoscenze** con **abilità** né i **segmenti** coi **bastoncini**.

Proposta n.2

Causa di **difficoltà di apprendimento in matematica** è anche la **frammentazione dei contenuti**.

Proposta n.2. *Adottare un approccio **modellistico**: la matematica come linguaggio per descrivere sistemi e problemi.*

In un modello matematico entrano in gioco contemporaneamente numeri, insiemi, funzioni, sistemi di equazioni e disequazioni, relazioni logiche, enti geometrici, vettori e matrici, probabilità e distribuzioni,...

- Modelli **descrittivi**: fisica
- Modelli **predittivi**: statistica
- Modelli **prescrittivi**: ricerca operativa

Modelli matematici

Fisica

- modelli di **sistemi**
- grandezze **continue**
- **equazioni**
- soluzione **unica**
- **senza** decisioni né obiettivi
- scopo **descrittivo**.

Ricerca operativa

- modelli di **problemi**
- grandezze anche **discrete**
- **disequazioni**
- soluzioni **multiple**
- **con** uno o più obiettivi
- scopo **prescrittivo**.

Passaggio da **risolvere** a **decidere/ottimizzare**.

Dare spazio ai modelli matematici **discreti**.

Dimostrazioni di ottimalità

Invece di dimostrare che

- una soluzione del problema **esiste**,
- la soluzione del problema **è unica**,

si dimostra che

- una soluzione **ottima** del problema **esiste**,
- la soluzione **ottima** del problema **è unica**.

Esistono diverse tecniche per dimostrare l'**ottimalità**.

Proposta n.3

Non tutti i problemi si possono risolvere in modo **esatto** con una **formula**; alcuni richiedono un **algoritmo**.

Presentare solo problemi appositamente inventati per essere risolti in modo esatto con formule significa **adattare la realtà alla matematica**.

Proposta n.3: *adattare la matematica alla realtà, includendo la trattazione di **problemi che non si risolvono in forma chiusa**, o in modo **esatto**, ma richiedono un **algoritmo**, eventualmente di **approssimazione**.*

Anche gli algoritmi sono **concetti matematici**, oggetto di studio per la matematica, e hanno **proprietà matematicamente dimostrabili**:

- **Correttezza**: cosa garantisce l'algoritmo? Termina?
- **Complessità computazionale**: come dipende il consumo di spazio (memoria) e tempo di un algoritmo dalle dimensioni dei dati in ingresso?

Correttezza

Per dimostrare la **correttezza** di un algoritmo: **invariante di ciclo**.

Per dimostrare la **terminazione** di un algoritmo: **monotonicità (stretta) di una grandezza (discreta e finita)**.

Nel caso degli **algoritmi di ottimizzazione**, le garanzie da dimostrare sono tipicamente

- di **ottimalità** o di **approssimazione**;
- di **complessità**.

Nuovi concetti

Il concetto di **complessità computazionale** è relativamente nuovo.

Nella matematica tradizionale un problema con un numero finito di soluzioni è banale: basta enumerarle tutte.

Also in other disciplines it was recognized that while the assignment problem is a finite problem, there is a complexity issue. In an address delivered on 9 September 1949 at a meeting of the American Psychological Association at Denver, Colorado, Thorndike [1950] studied the problem of the 'classification' of personnel (being job assignment):

The past decade, and particularly the war years, have witnessed a great concern about the classification of personnel and a vast expenditure of effort presumably directed towards this end.

He exhibited little trust in mathematicians:

There are, as has been indicated, a finite number of permutations in the assignment of men to jobs. When the classification problem as formulated above was presented to a mathematician, he pointed to this fact and said that from the point of view of the mathematician there was no problem. Since the number of permutations was finite, one had only to try them all and choose the best. He dismissed the problem at that point. This is rather cold comfort to the psychologist, however, when one considers that only ten men and ten jobs mean over three and a half million permutations. Trying out all the permutations may be a mathematical solution to the problem, it is not a practical solution.