

Grafi di incompatibilità

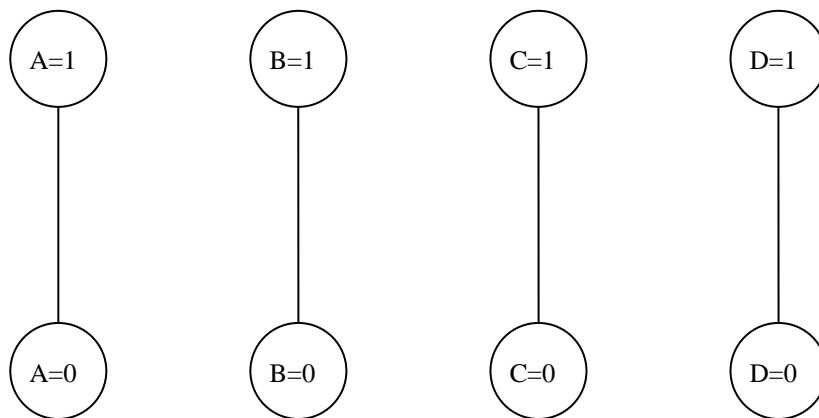
[Da "I Giochi di Archimede" – Gara Biennio, 21 Novembre 2007]

In un paese abitano solo briganti, che mentono sempre, e cavalieri, che dicono sempre la verità. Un giornalista intervista quattro abitanti. Arturo, Bernardo, Carlo e Dario, che fanno le seguenti dichiarazioni. Arturo: "Bernardo è un brigante"; Bernardo: "Io sono l'unico cavaliere tra noi quattro"; Carlo: "Almeno uno tra Arturo e Dario è un brigante"; Dario: "Siamo quattro cavalieri". Quanti tra i quattro sono cavalieri?

Rappresentiamo i due casi possibili per ogni intervistato in un grafo, che ha quindi otto vertici.

Ogni vertice rappresenta il fatto che uno dei quattro sia un brigante o un cavaliere (e quindi che la sua affermazione sia falsa o sia vera). Indichiamo con $A=0$ (brigante) e $A=1$ (cavaliere) le due possibilità per Arturo e similmente per gli altri. Inseriamo nel grafo uno spigolo tra due vertici quando le due corrispondenti possibilità sono incompatibili, cioè non possono essere vere entrambe.

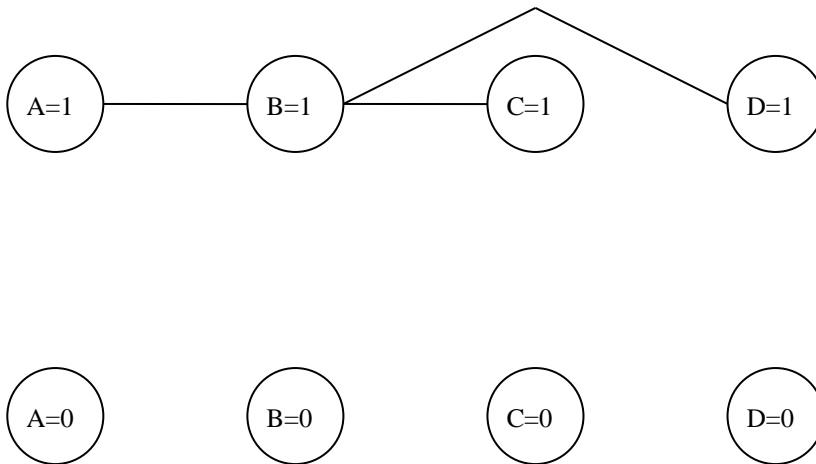
Inizialmente il grafo ha le 4 ovvie incompatibilità tra essere brigante ed essere cavaliere, per ciascuno dei quattro.



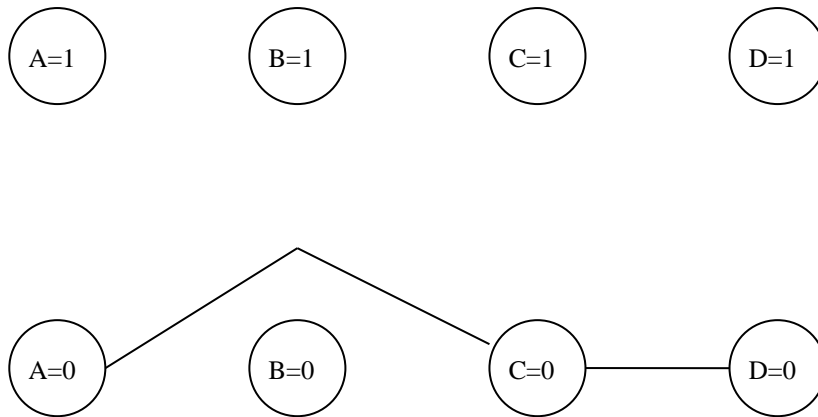
Ora rappresentiamo nel grafo le altre informazioni. Arturo afferma: "Bernardo è un brigante". Quindi è impossibile che Arturo dica la verità e Bernardo sia un cavaliere ed è impossibile anche che Arturo menta e Bernardo sia un brigante.



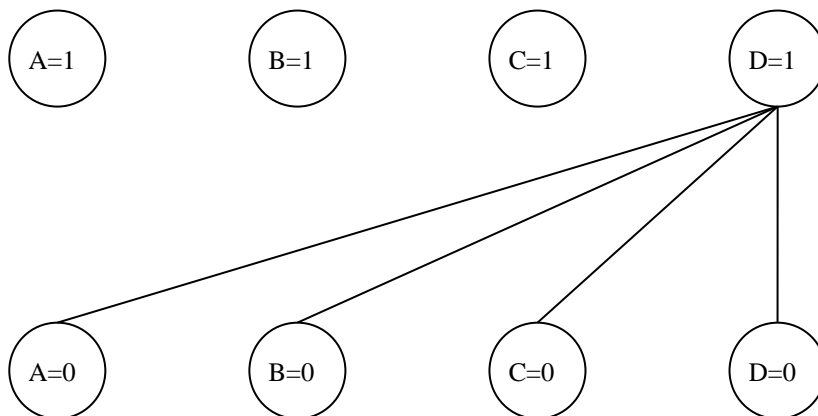
Bernardo afferma: “Io sono l’unico cavaliere tra noi quattro”. Quindi è incompatibile che Bernardo dica la verità e uno qualunque degli altri tre sia cavaliere.



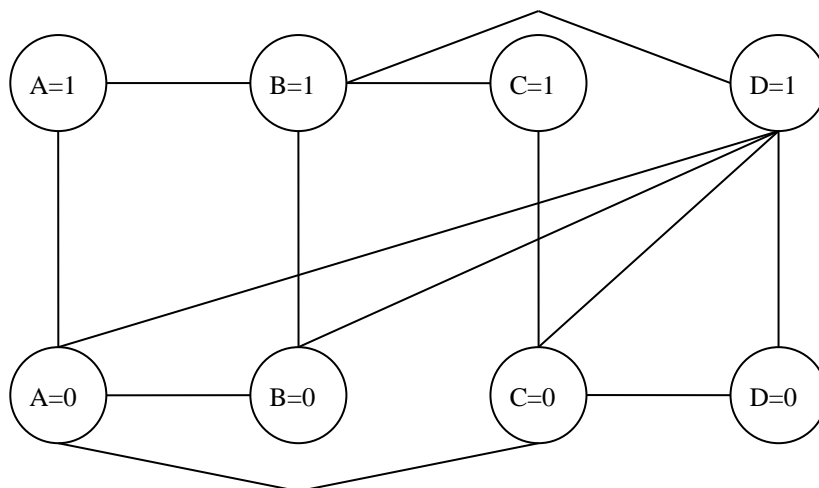
Carlo afferma: “Almeno uno tra Arturo e Dario è un brigante”. Dobbiamo in questo caso negare la dichiarazione di Carlo. Infatti se la dichiarazione è vera, non ci permette di dedurre nulla su Arturo singolarmente o su Dario singolarmente. La negazione di ciò che afferma Carlo è “Arturo e Dario sono entrambi cavalieri”. Quindi se Carlo mente, sia Arturo che Dario sono cavalieri. Quindi è incompatibile che Carlo menta e che Arturo sia un brigante ed è anche incompatibile che Carlo menta e che Dario sia un brigante.



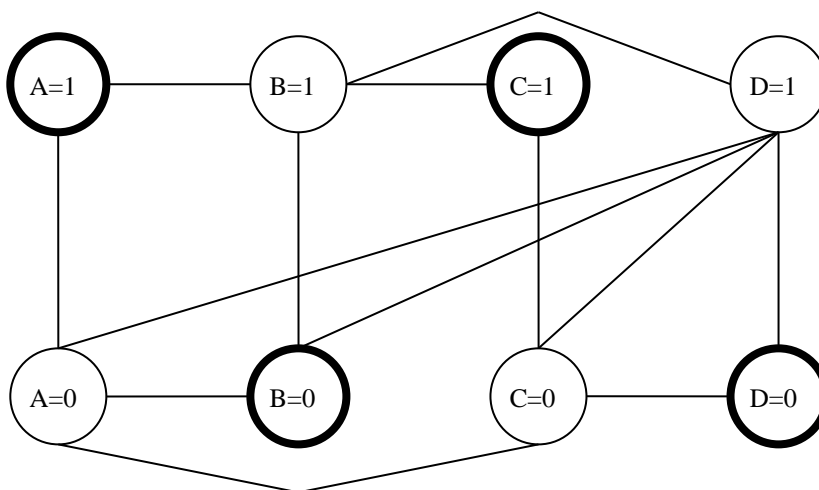
Infine Dario afferma: “Siamo quattro cavalieri”. Quindi è incompatibile che Dario dica la verità col fatto che chiunque dei quattro sia un brigante.



Inserendo tutte le incompatibilità nel grafo otteniamo quindi quanto segue.



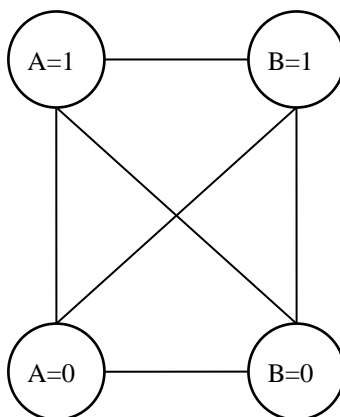
Sappiamo che 4 delle 8 possibilità devono essere vere e 4 false. Ogni persona infatti è o brigante o cavaliere. Dobbiamo identificare quindi 4 vertici del grafo che non siano incompatibili tra di loro. Dal triangolo formato da $D=1$, $D=0$ e $C=0$ osserviamo che solo uno dei tre vertici può essere scelto, perché qualunque scelta di due vertici sarebbe proibita da un'incompatibilità. Poiché uno tra $D=0$ e $D=1$ deve essere per forza scelto, $C=0$ non può essere scelto: quindi Carlo non può essere un brigante. Quindi $C=1$, cioè Carlo è un cavaliere. Da qui si deduce che non può essere scelto nessun vertice incompatibile con $C=1$, cioè $B=1$. Quindi $B=0$: Bernardo è un brigante. Per lo stesso motivo avendo scelto $B=0$ dobbiamo escludere $A=0$ e $D=1$, che sono incompatibili con $B=0$. Quindi $A=1$ e $D=0$: Arturo è un cavaliere e Dario è un brigante.



Questa è la soluzione completa. Ci sono due cavalieri (A e C) e due briganti (B e D).

Nello stesso modo possono essere rappresentati esercizi con più di una soluzione possibile o con nessuna soluzione. Il grafo è uno strumento modellistico così potente che permette di rappresentare

facilmente anche il concetto di “paradosso logico”. Un grafo di incompatibilità di questo tipo, ad esempio, non ammette soluzione.



La soluzione del paradosso non esiste, ma il grafo che rappresenta il paradosso (e ci permette di riconoscerlo come tale) esiste.