Prova scritta d'esame di ricerca operativa
17 Giugno 2024

Esercizio 1: Project management

Un progetto consiste in un dato insieme di attività di lavorazione industriale di un composto formato da due materie prime, X e Y. La durata di ogni attività dipende dalla quantità di X e di Y nella miscela. Alcune attività sono più rapide all'aumentare di X rispetto a Y, mentre per altre è vero il contrario. Sono note le durate di ogni attività nei due casi estremi (solo X e solo Y) e si sa che la loro durata varia linearmente con la quantità di X e Y rispetto al totale.

Tra i momenti iniziali e finali delle varie attività esistono talvolta vincoli di precedenza.

Assumendo che A e B siano miscelate in uguale quantità, si vuole calcolare il minimo tempo necessario per completare l'intero progetto.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file PM.TXT. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Identificare le *attività critiche*, cioè le attività per cui un aumento della durata provocherebbe un aumento della durata dell'intero progetto.

Di quanto potrebbe aumentare la durata di ciascuna attività non-critica (ferme restando le durate di tutte le altre), senza allungare la durata dell'intero progetto?

Di quanto dovrebbe diminuire la durata di ciascuna attività critica (ferme restando le durate di tutte le altre), affinché l'attività cessi di essere critica?

Versione 2.

Si vuole ora studiare come varia il tempo di completamento del progetto al variare della composizione della miscela e si vuole determinare la composizione che minimizza il tempo totale necessario.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere anche in questo caso l'esempio descritto nel file PM.TXT. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Versione 3.

Ogni attività richiede un operatore dedicato, ma gli operatori sono solo k. Quindi non possono essere eseguite in parallelo più di k attività per volta.

Si vorrebbe minimizzare k ma anche la durata totale del progetto.

Formulare il problema e classificarlo.

Calcolare la regione Pareto-ottima assumendo come proporzione tra X e Y quella ottima determinata al passo precedente.

Determinare la soluzione Pareto-ottima per la quale il rapporto tra i valori dei due obiettivi risulta più vicino a quello del punto-utopia.

Esercizio 2: Sigmoide

Un neurone artificiale ha una funzione di attivazione descritta da una curva sigmoide di equazione

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}.$$

Si vuole approssimare la sigmoide con una funzione lineare a tratti costituita da tre segmenti rettilinei.

Si vuole minimizzare la massima differenza in valore assoluto tra il valore della sigmoide e quello della funzione lineare a tratti.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo.

Discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Suggerimento: la derivata prima della funzione $f(x) = \arctan(x)$ è la funzione $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.