Project management.

Un progetto consiste in un dato insieme di attività di lavorazione industriale di un composto formato da due materie prime, X e Y. La durata di ogni attività dipende dalla quantità di X e di Y nella miscela. Alcune attività sono più rapide all'aumentare di X rispetto a Y, mentre per altre è vero il contrario. Sono note le durate di ogni attività nei due casi estremi (solo X e solo Y) e si sa che la durata varia linearmente con la quantità di X e Y rispetto al totale.

Tra i momenti iniziali e finali delle varie attività esistono talvolta vincoli di precedenza.

Assumendo che X e Y siano miscleate in uguale quantità, si vuole calcolare il minimo tempo necessario per completare l'intero progetto.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file PM.TXT. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Identificare le *attività critiche*, cioè le attività per cui un aumento della durata provocherebbe un aumento della durata dell'intero progetto.

Di quanto potrebbe aumentare la durata di ciascuna attività non-critica (ferme restando le durate di tutte le altre), senza allungare la durata dell'intero progetto?

Di quanto dovrebbe diminuire la durata di ciascuna attività critica (ferme restando le durate di tutte le altre), affinché l'attività cessi di essere critica?

Versione 2.

Si vuole ora studiare come varia il tempo di completamento del progetto al variare della composizione della miscela e si vuole determinare la composizione che minimizza il tempo totale necessario.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file PM.TXT. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Versione 3. Ogni attività richiede un operatore dedicato, ma gli operatori sono solo k. Quindi non possono essere eseguite in parallelo più di k attività per volta.

Si vorrebbe minimizzare k ma anche la durata totale del progetto.

Formulare il problema e classificarlo.

Calcolare la regione Pareto-ottima assumendo come proporzione tra X e Y quella ottima determinata al passo precedente.

Determinare la soluzione Pareto-ottima per la quale il rapporto tra i valori dei due obiettivi risulta più vicino a quello del punto-utopia.

Dati.

Attività	Durata con solo X	Durata con solo Y	Predecessori
A	30	20	-
B	15	45	-
C	25	5	-
D	32	12	A
E	14	12	A,B
F	19	49	B,C
G	20	10	D,E
H	10	18	D,E

Soluzione commentata. Sia N l'insieme delle attività e siano d_i^X e d_i^Y le durate date per ogni attività $i \in N$ nei due casi limite. Nell'ipotesi che X e Y siano miscelate in uguale quantità, la durata di ogni attività è data da

$$d_i = (d_i^X + d_i^Y)/2 \quad \forall i \in N.$$

Sia P l'insieme delle precedenze (i, j) con $i, j \in N$.

Per rappresentare una soluzione basta introdurre per ogni attività $i \in N$ una variabile continua non-negativa, che indichiamo con s_i che rappresenti, ad esempio, il suo istante di inizio. Per comodità si può anche introdurre una variabile e_i che rappresenti la conclusione di ogni attività $i \in N$. Entrambe sono espresse in minuti, dato che le durate previste sono date in minuti. Una variabile ausiliaria m serve a linearizzare la funzione-obiettivo min-max e indica la durata totale del progetto (il *makespan*).

L'obiettivo è la minimizzazione del makespan, ossia del massimo valore tra tutti gli istanti di completamento delle attività:

$$\text{minimize } z = m$$

$$m \geq e_i \quad \forall i \in N.$$

Il vincolo sulla durata delle attività impone che sia

$$e_i - s_i \geq d_i \quad \forall i \in N$$

e si può imporre indifferentemente come vincolo di uguaglianza o di disuguaglianza, dato che non è mai conveniente far durare un'attività più del necessario.

I vincoli sulle precedenze hanno la forma

$$s_j \geq e_i \quad \forall (i, j) \in P.$$

Il modello del problema è di programmazione lineare. La soluzione calcolata dal solutore è ottima; la durata minima del progetto è di 64 minuti. La soluzione ottima non è unica poiché ci sono diverse variabili fuori-base con costo ridotto nullo. Le attività critiche sono le attività B e F, le uniche per cui il costo ridotto del vincolo sulla durata è strettamente positivo.

Dall'analisi post-ottimale si osserva che tutte le attività non-critiche possono essere spostate nel tempo, entro certi limiti, senza che aumenti la durata totale del progetto. Il massimo incremento di durata consentito affinché le attività non-critiche rimangano tali è pari a 2 minuti per A, 15 per C, 2 per D, 4 per E, 2 per G, 3 per H. Il minimo decremento di durata necessario per rendere non-critiche le attività critiche è pari a 2 minuti sia per B che per F.

Versione 2. Nella versione 2 bisogna introdurre un'ulteriore variabile η, continua, compresa tra 0 e 1, che indica la frazione di X nella miscela; di conseguenza $1 - \eta$ indica la frazione di Y nella miscela. Come prima, la durata di ogni attività è data da

$$d_i = d_i^X \eta + d_i^Y (1 - \eta) \quad \forall i \in N,$$

dove d^X e d^Y sono le due durate nei casi limite, ma stavolta η è variabile. La versione 1 del problema corrisponde alle versione 2 fissando $\eta = 0.5$.

Il modello nella versione 2 è ancora di programmazione lineare e la soluzione ottenuta dai solutori è ancora garantita ottima. Il makespan può essere ridotto a $62,8$ minuti scegliendo $\eta^* = 0.52$. Anche se il valore di η^* è unico, la soluzione ottima non è unica, dato che esistono attività non-critiche (C, E e H), i cui tempi di inizio e fine possono variare (entro certi limiti) senza che il valore ottimo cambi.

Versione 3. Nella versione 3 la durata di ogni attività torna ad essere univocamente determinata dal fissaggio della variabile $\eta = 0.52$.

Per imporre la non-simultaneità di più di k attività, bisogna introdurre variabili binarie. Una possibile scelta è quella di usare una variabile binaria x_{ij} per ogni coppia di attività, con il vincolo

$$e_j - s_i \leq M x_{ij},$$

dove M è una costante grande abbastanza da rendere ridondante il vincolo quando $x_{ij} = 1$ (si può scegliere M pari alla somma di tutti i tempi di esecuzione delle attività, per esempio). L'effetto di questi vincoli è di forzare x_{ij} a 1 quando l'attività i inizia prima che j sia finita. Quando $x_{ij} = x_{ji} = 1$, le due attività sono sovrapposte.

La soluzione ottima della versione 2 prevede fino ad un massimo di tre attività in parallelo. Quindi per $k \geq 3$ non è necessario modificare il modello. Il vincolo per $k = 1$ è

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall i, j \in N, i \neq j$$

mentre il vincolo per $k = 2$ è

$$x_{ij} + x_{ji} + x_{ik} + x_{ki} + x_{jk} + x_{kj} \leq 5.$$

Il modello risultante è di programmazione lineare intera, con variabili binarie. La soluzione calcolata dai solutori è garantita essere ottima, non necessariamente unica.

Per $k = 2$ una soluzione ottima consiste nell'eseguire consecutivamente le attività B, D e F con un operatore e le attività A, C, E, G e H con l'altro, ottenendo un makespan di $85,2$ minuti.

Per $k = 1$ una soluzione ottima consiste nell'eseguire in sequenza le attività A, B, C, F, D, E, G, H, ottenendo un makespan di $167,88$ minuti. Esistono molte sequenze compatibili con i vincoli di precedenza ed equivalenti dal punto di vista del makespan.

Quindi nella formulazione a molti-obiettivi ci sono tre soluzioni Pareto-ottime con valori di $k = 1, 2, 3$ e corrispondenti valori di makespan 167.88, $85,2$ e $62,8$. Il punto-utopia ha coordinate $k = 1$ e $z = 62,8$. Il rapporto z/k per il punto-utopia è pari a $62,8$. Calcolando tale rapporto per i tre punti Pareto-ottimi si ottengono i valori $167,88$, $42,6$ e $20,9\overline{3}$. Il valore del rapporto più vicino a quello del punto-utopia è quindi quello della soluzione con $k = 2$ operatori e $z = 85,2$ minuti.