Triangolo

Dato un insieme di punti nel piano, in posizioni note, si vuole trovare il più piccolo triangolo equilatero che li copra tutti. Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file `Triangolo.txt`. Discutere ottimalità e unicità della soluzione.

Dati.

I punti dati sono 5.

Punto	x	y
1	24	-17
2	15	14
3	-2	0
4	21	20
5	18	-6

Soluzione commentata.

I dati del problema sono l'insieme N di punti da coprire e le loro posizioni (x_i, y_i) $\forall i \in N$ nel piano.

Per descrivere un trinagolo equilatero, si possono utilizzare diversi modi. Ad esempio si possono usare come variabili le coordinate dei tre vertici ed i coefficienti delle equazioni delle tre rette che contengono i lati. Sia V l'insieme dei vertici. Siano $\overline{x}_j$ e $\overline{y}_j$ le coordinate del vertice $j \in V$. Sia L una variabile ausiliaria che indica la lunghezza del lato. Siano a_j, b_j e c_j i coefficienti della retta che contiene il lato opposto al vertice $j \in V$.

Il modello contiene i seguenti vincoli:

- Normalizzazione dei coefficienti delle tre rette:

$$a_j^2 + b_j^2 = 1 \ \ \forall j \in V$$

- I lati devono essere di uguale lunghezza

$$L = \sqrt{(\overline{x}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{x}_j)^2 + (\overline{y}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{y}_j)^2} \quad \forall j \in V$$

  assumendo $V = 0, 1, 2$ per poter usare comodamente il calcolo modulo 3 sugli indici.

- Passaggio delle rette dai vertici

$$a_j \overline{x}_k + b_j \overline{y}_k + c_j = 0 \ \ \forall j, k \in V : k \neq j$$

- Rispetto ad ogni retta, i punti dati devono cadere dalla stessa parte del vertice opposto

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j \geq 0 \ \ \forall \in N, \forall j \in V$$

$$a_j \overline{x}_j + b_j \overline{y}_j + c_j \geq 0$$

L'obiettivo è di minimizzare la dimensione del triangolo:

$$\text{minimize } z = L.$$

Come descritto sopra, il modello potrebbe tuttavia ammettere una soluzione degenere in cui il triangolo collassa in un solo punto e le tre rette vedono tutti i punti dalla parte "giusta" senza che ciò significhi che il triangolo li contiene. Per evitare questo caso patologico, si può definire una grandezza ϵ che sostituisca il termine noto 0 nel vincolo $a_j \overline{x}_j + b_j \overline{y}_j + c_j \geq 0$, impedendo così che il triangolo degeneri in un punto. La distanza ϵ può anche fungere utilmente da lower bound per L. Ad esempio si può scegliere ϵ pari alla massima distanza tra due punti dati: $\epsilon = \max_{i \in N, k \in N} \{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2)}\}$, poiché il lato del triangolo non può essere più corto di essa.

Un'altra modifica che può essere utile fare per aiutare il solutore a convergere correttamente è lavorare con L^2 anziché L. Si può dichiarare come variabile $\overline{L}$ che rappresenta il quadrato del lato.

Il vincolo $L = \sqrt{(\overline{x}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{x}_j)^2 + (\overline{y}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{y}_j)^2} \quad \forall j \in V$ viene sostituito da $\overline{L} = (\overline{x}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{x}_j)^2 + (\overline{y}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{y}_j)^2 \quad \forall j \in V$ e l'obiettivo diventa la minimizzazione di $\overline{L}$.

E' consigliabile anche inizializzare $\overline{L}$ ad un valore "grande abbastanza" o i tre vertici da posizioni sufficientemente distanti da includere già i punti dati, per far partire il solutore da una soluzione già ammissibile.

Il modello è di PNL nel continuo. In generale il problema non è convesso. E' facile immaginare minimi locali: si considerino 6 punti posti ai vertici di un esagono regolare; essi definiscono due soluzioni di ugual valore (due minimi locali equivalenti), ruotate di 60 gradi l'una rispetto all'altra. Quindi i solutori forniscono solo garanzia di ottimalità locale.

Una soluzione alternativa, anche più elegante, si ha imponendo che ogni punto dato si possa esprimere come combinazione convessa dei tre vertici del triangolo equilatero. In questo modo si può fare a meno di rappresentare le rette dei lati ed il modello diventa molto più semplice e compatto. Siano λ_{ij} coefficienti non-negativi tali che $\sum_{j \in V} \lambda_{ij} = 1 \forall i \in N$. Il vincolo di inclusione di ogni punto nel triangolo diventa

$$x_i = \sum_{j \in V} \lambda_{ij} \overline{x}_j \quad \forall i \in N$$

$$y_i = \sum_{j \in V} \lambda_{ij} \overline{y}_j \quad \forall i \in N.$$

In questo modello sopravvivono solo i vincoli

$$\overline{L} = (\overline{x}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{x}_j)^2 + (\overline{y}_{(j+1) \bmod 3} - \overline{y}_j)^2 \quad \forall j \in V$$

e l'obiettivo resta quello di minimizzare $\overline{L}$.

La soluzione ottima calcolata da Baron ha i vertici in posizione $(21, 20)$, $(-9.54292, -1.09808)$ e $(24, -17)$ ed il lato di lunghezza 37.12 circa.